Ответ. У исландского шпата очень велика разность обыкновенного и необыкновенного показателей преломления, так что даже в тонких пластинках получаются большие разности хода, при которых интерференция в белом свете невозможна.

3. Две толстые пластинки одноосного кристалла, одинаково ориентированные и весьма мало отличающиеся по толщине, в скрещенных николях дают порознь белый свет. Почему в тех же условиях может получиться окрашивание, если повернуть одну пластинку относительно другой на 90°?

Решение. Когда пластинки одинаково ориентированы, вносимая ими разность хода велика, т. е. соответствует высокому порядку интерференции. В таких условиях интерференция в белом свете наблюдаться не может. Если одну из пластинок повернуть относительно другой на 90°, то вносимая ими разность хода будет такая же, какая вносится пластинкой с толщиной, равной разности толщин рассматриваемых пластинок. При малой разности толщин разность хода может сделаться настолько малой, что станет возможна интерференция в белом свете.

4. Кварцевая пластинка толщиной в 1 мм вырезана перпендикулярно к оптической оси. Как определить, из право- или левовращающего кварца сделана пластинка, имея в своем распоряжении два николя и источник: 1) монохроматического света; 2) белого света?

Ответ. 1) Если поместить пластинку кварца, вырезанную перпендикулярно к оптической оси, между скрещенными николями и осветить систему монохроматическим светом, то она будет пропускать свет; повернув анализатор на угол, меньший 90°, можно снова погасить свет. Если при этом наблюдатель должен вращать анализатор по направлению часовой стрелки, то кварц будет правовращающий, если же против часовой стрелки, то левовращающий.

2) Если осветить систему белым светом, то пластинка будет казаться окрашенной. Вращательная способность увеличивается с уменьшением длины волны. Поэтому, если вращать анализатор по часовой стрелке, то для правовращающего кварца окраска будет меняться в сторону коротких длин волн спектра. Для левовращающего кварца порядок изменения окраски будет обратный.

§ 80. Нормальные скорости и поляризация волн в двуосных кристаллах

1. Перейдем теперь к исследованию распространения волн в *оптически двуосных кристаллах*. В общем случае вектор $\boldsymbol{D}$ может зависеть не только от вектора $\boldsymbol{E}$, но и от его пространственных производных. Это явление называется *пространственной дисперсией* (см. § 96). В слабых полях такая зависимость, конечно, может считаться линейной. Для плоских монохроматических волн дифференцирование $\boldsymbol{E}$ по координатам x, y, z сводится к умножению его проекций на $-ik_x$, $-ik_y$, $-ik_z$. В этом случае зависимость от пространственных производных можно учесть прежней формулой (75.2), если диэлектрический тензор ε_{kj} считать комплексным. Формально так можно поступать и в случае неплоских волн. Однако волны должны предполагаться монохроматическими.

Для непоглощающих сред диэлектрический тензор должен быть *эрмитовым*, т. е. $\varepsilon_{kj} = \varepsilon^*_{jk}$. Действительно, для производной плотности электромагнитной энергии u по времени электродинамика дает

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{B}})$$

(см. т. III, § 84). В случае монохроматического поля в непоглощающей среде среднее значение этой производной, согласно закону сохранения энергии, должно равняться нулю. Если пользоваться комплексной формой монохроматического поля, то это условие запишется в виде $(\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{D}}^* + \boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{B}}^*)$ + компл. сопр. = 0. А так как мы пренебрегаем различием между $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$, то $\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{D}}^*$ + компл. сопр. = = 0. Отсюда с учетом соотношений $\dot{\boldsymbol{D}} = i\omega\boldsymbol{D}$, $\dot{\boldsymbol{D}}^* = -i\omega\boldsymbol{D}^*$ получаем: $\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}^* - \boldsymbol{E}^*\boldsymbol{D} = 0$, или

$$\sum E_\alpha \varepsilon^*_{\alpha\beta} E^*_\beta - \sum E^*_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta = 0.$$

Заменим в первой сумме немой индекс α на β и наоборот. Тогда

$$\sum (\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^*_{\beta\alpha})\, E^*_\alpha E_\beta = 0.$$

Это соотношение должно выполняться для любого поля $\boldsymbol{E}$, что возможно тогда и только тогда, когда $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^*_{\beta\alpha}$. Действительно, пусть все компоненты вектора $\boldsymbol{E}$, за исключением одной E_α, равны нулю. Тогда предыдущее соотношение переходит в $(\varepsilon_{\alpha\alpha} - \varepsilon^*_{\alpha\alpha})E_\alpha E^*_\alpha = 0$, откуда $\varepsilon_{\alpha\alpha} = \varepsilon^*_{\alpha\alpha}$. Пусть теперь отличны от нуля две компоненты E_α и E_β, а третья компонента равна нулю. Тогда

$$(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^*_{\beta\alpha})\, E^*_\alpha E_\beta + (\varepsilon_{\beta\alpha} - \varepsilon^*_{\alpha\beta})\, E_\alpha E^*_\beta = 0.$$

Полагая здесь $E_\alpha = E_\beta$, получим

$$(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^*_{\beta\alpha}) + (\varepsilon_{\beta\alpha} - \varepsilon^*_{\alpha\beta}) = 0.$$

Полагая же $E_\beta = iE_\alpha$, найдем

$$(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^*_{\beta\alpha}) - (\varepsilon_{\beta\alpha} - \varepsilon^*_{\alpha\beta}) = 0.$$

Из этого и предыдущего соотношений следует: $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^*_{\beta\alpha}$. Таким образом, соотношение $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^*_{\beta\alpha}$ справедливо как для одинаковых, так и для разных индексов α и β, т. е. для непоглощающих кристаллов *тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ эрмитов. Для поглощающих кристаллов он не эрмитов*.

Допустим теперь, что среда не обладает пространственной дисперсией или этим явлением, ввиду его малости, можно пренебречь. Тогда величины $\varepsilon_{\alpha\beta}$ вещественны, а потому $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha}$, т. е. тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ будет *симметричен*. В дальнейшем мы ограничимся этим случаем. Кроме того, будем предполагать, что все диагональные элементы $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ *положительны*. Только тогда среда будет *прозрачной*, т. е. плоские волны в ней будут распространяться без затухания. В противном случае возникнет затухание без поглощения, как это имеет место, например, в плазме (см. § 87).

Всякий симметричный тензор можно привести к так называемому *диагональному виду*, т. е. найти такую систему прямоугольных координат, в которой недиагональные компоненты тензора обращаются в нуль. Диагональные компоненты тензора в этой системе координат условимся обозначать через ε_x, ε_y, ε_z, т. е. характеризовать их не двойными, а только единичными индексами x, y, z. В рассматриваемой системе материальные уравнения имеют вид

$$D_\alpha = \varepsilon_\alpha E_\alpha. \tag{80.1}$$

Координатные оси, относительно которых тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ диагонален, называются *главными осями тензора* или *диэлектрическими осями кристалла*, а величины ε_x, ε_y, ε_z — *главными диэлектрическими проницаемостями*. Эти оси мы и примем за координатные оси, причем названия осей X, Y, Z установим так, чтобы соблюдались неравенства

$$\varepsilon_x \leqslant \varepsilon_y \leqslant \varepsilon_z. \tag{80.2}$$

Так как компоненты тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ могут зависеть от длины волны λ, могут зависеть от λ и направления диэлектрических осей. Это явление, называемое *дисперсией диэлектрических осей*, действительно встречается в триклинных и моноклинных кристаллах, характеризующихся наиболее низкой симметрией.

Отметим, наконец, что угол α между векторами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$ всегда острый. Это вытекает из того, что скалярное произведение $(\boldsymbol{ED}) = ED \cos \alpha$ пропорционально плотности электрической энергии, а она существенно положительна.

2. Обратимся теперь к исследованию плоских волн (75.3) в прозрачных кристаллах в общем виде. Фиксируем направление волновой нормали $\boldsymbol{N}$ и определим, какие плоские волны могут распространяться в этом направлении. Используя материальные уравнения (80.1), перепишем соотношение (75.7) в следующем виде:

$$(v^2 - a_\alpha^2)\, D_\alpha = -c^2 (\boldsymbol{NE})\, N_\alpha, \tag{80.3}$$

где введено обозначение

$$a_\alpha = c/\sqrt{\varepsilon_\alpha}. \tag{80.4}$$

Разделив на $v^2 - a_\alpha^2$, получим

$$D_\alpha = -\frac{c^2}{v^2 - a_\alpha^2} (\boldsymbol{NE})\, N_\alpha. \tag{80.5}$$

Умножим обе части этого соотношения на N_α и просуммируем по α. Тогда

$$\sum_\alpha D_\alpha N_\alpha \equiv (\boldsymbol{DN}) = -c^2 (\boldsymbol{NE}) \sum_\alpha \frac{N_\alpha^2}{v^2 - a_\alpha^2} = 0,$$

так как $(\boldsymbol{DN}) = 0$. Скалярное произведение $(\boldsymbol{NE})$, вообще говоря, отлично от нуля. Поэтому

$$\sum \frac{N_\alpha^2}{v^2 - a_\alpha^2} = 0. \tag{80.6}$$

В развернутом виде

$$\frac{N_x^2}{v^2-a_x^2}+\frac{N_y^2}{v^2-a_y^2}+\frac{N_z^2}{v^2-a_z^2}=0, \tag{80.7}$$

а после освобождения от знаменателей

$$F(v^2)\equiv N_x^2(v^2-a_y^2)(v^2-a_z^2)+N_y^2(v^2-a_z^2)(v^2-a_x^2)+\\ +N_z^2(v^2-a_x^2)(v^2-a_y^2)=0. \tag{80.8}$$

Хотя уравнение (80.8) мы и получили преобразованием уравнения (80.7), в действительности оно обладает большей общностью. Как видно из вывода, при получении (80.7) надо было вводить предположение, что $v^2-a_\alpha^2\neq 0$ и $(NE)\neq 0$. Уравнение (80.7) теряет смысл, когда по крайней мере одна из разностей $v^2-a_\alpha^2$ обращается в нуль. Уравнение же (80.8) остается справедливым и в этом случае, как показывает несложное математическое исследование, которое мы опускаем.

3. Уравнение (80.6) или (80.8) называется *законом Френеля для нормальной скорости распространения световых волн в кристалле*. Если задать направление N, то из этих уравнений можно определить нормальную скорость v. Уравнение (80.8) второй степени относительно v^2. Докажем, что оно имеет вещественные и притом положительные корни. Для прозрачных кристаллов главные диэлектрические проницаемости, а с ними и величины a_α^2, существенно положительны. При этом ввиду условия (80.2)

$$a_x\geqslant a_y\geqslant a_z. \tag{80.9}$$

Придавая в функции $F(v^2)$ аргументу v^2 значения a_x^2, a_y^2, a_z^2, придем к неравенствам:

$$F(a_x^2)=N_x^2(a_x^2-a_y^2)(a_x^2-a_z^2)\geqslant 0,$$
$$F(a_y^2)=N_y^2(a_y^2-a_z^2)(a_y^2-a_x^2)\leqslant 0,$$
$$F(a_z^2)=N_z^2(a_z^2-a_x^2)(a_z^2-a_y^2)\geqslant 0.$$

Из них видно, что функция $F(v^2)$ дважды меняет знак: один раз между a_x^2 и a_y^2, другой — между a_y^2 и a_z^2. Следовательно, уравнение $F(v^2)=0$ имеет два вещественных положительных корня: v_1^2 и v_2^2, причем

$$a_x\geqslant v_1\geqslant a_y\geqslant v_2\geqslant a_z. \tag{80.10}$$

Отсюда следует, что в направлении N могут распространяться две волны: одна с нормальной скоростью v_1, а другая с v_2. В частных случаях скорости v_1 и v_2 могут совпадать.

Если скорости v_1 и v_2 различны, то каждая из волн будет поляризована линейно. Это следует из соотношения

$$D_x:D_y:D_z=\frac{N_x}{v^2-a_x^2}:\frac{N_y}{v^2-a_y^2}:\frac{N_z}{v^2-a_z^2}, \tag{80.11}$$

которое получается из (80.5) и в котором под v следует понимать либо v_1, либо v_2. Все величины, стоящие в правой части (80.11), вещественны. Значит, между компонентами D_x, D_y, D_z нет сдвигов фаз, отличающихся от 0 или π, а потому волна поляризована линейно.

Докажем, что если скорости v_1 и v_2 различны, то векторы $\boldsymbol{D}$ обеих волн, которые могут распространяться в направлении $\boldsymbol{N}$, взаимно перпендикулярны. Отмечая величины, относящиеся к одной из волн, индексом 1, а к другой — индексом 2, из (75.7) получим

$$v_1^2\boldsymbol{D}_1 - c^2\boldsymbol{E}_2 = -c^2(\boldsymbol{N}\boldsymbol{E}_1)\boldsymbol{N},$$
$$v_2^2\boldsymbol{D}_2 - c^2\boldsymbol{E}_2 = -c^2(\boldsymbol{N}\boldsymbol{E}_2)\boldsymbol{N}.$$

Умножим первое уравнение скалярно на $\boldsymbol{D}_2$, второе на $\boldsymbol{D}_1$ и вычтем одно уравнение из другого. Так как $(\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{N}) = (\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{N}) = 0$, то в результате получим

$$(v_1^2 - v_2^2)\,\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2 = c^2(\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{D}_1).$$

Но, очевидно, $\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{D}_1$, так как каждое из этих скалярных произведений равно $\sum \varepsilon_\alpha E_{1\alpha}E_{2\alpha}$. Следовательно,

$$(v_1^2 - v_2^2)\,\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2 = 0.$$

Отсюда при $v_1 \neq v_2$ следует $(\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2) = 0$, что и требовалось доказать. Аналогично докажем, что $(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2) = 0$.

Итак, в *каждом направлении в кристалле могут распространяться две линейно поляризованные волны, скорости которых, вообще говоря, различны. Обе волны поперечны относительно векторов* $\boldsymbol{D}$ *и* $\boldsymbol{B}$. *Векторы* $\boldsymbol{D}$ (*а также* $\boldsymbol{B}$) *в этих волнах взаимно перпендикулярны. Относительно вектора* $\boldsymbol{E}$ *обе волны в кристалле не поперечны, за исключением тех случаев, когда вектор* $\boldsymbol{E}$ *параллелен одной из диэлектрических осей кристалла*. Однако деление волн на обыкновенную и необыкновенную возможно *только для одноосных кристаллов*. В общем случае такое деление смысла не имеет — обе волны в кристалле ведут себя как «необыкновенные».

Чтобы выяснить физический смысл постоянных a_α, направим вектор $\boldsymbol{E}$ вдоль диэлектрической оси α. Тогда $\boldsymbol{D} = \varepsilon_\alpha \boldsymbol{E}$, и уравнение (75.8) перейдет в

$$v^2 = c^2\frac{\varepsilon_\alpha E^2}{\varepsilon_\alpha^2 E^2} = \frac{c^2}{\varepsilon_\alpha} = a_\alpha^2,$$

откуда $v = a_\alpha$. Таким образом, *величина* a_α *есть нормальная скорость распространения волны, у которой электрический вектор параллелен диэлектрической оси* α. Это утверждение становится очевидным, если заметить, что в частном случае, когда электрическое поле параллельно диэлектрической оси, уравнения распространения волн в кристалле не отличаются от уравнений в изотропных средах.

Величины a_α называются *главными скоростями распространения света в кристалле*. Наряду с главными скоростями, для характеристики оптических свойств кристаллов пользуются также *главными показателями преломления*, которые определяются выражениями

$$n_\alpha = c/a_\alpha = \sqrt{\varepsilon_\alpha}. \tag{80.12}$$

Для волны произвольного направления показатель преломления кристалла определяется выражением

$$n = c/v. \tag{80.13}$$

Его значение, как видно из (75.8), однозначно определяется направлением вектора $\boldsymbol{D}$ или $\boldsymbol{E}$. Каждому направлению нормали $\boldsymbol{N}$ соответствуют *два* значения показателя преломления в соответствии с двумя возможными поляризациями волны.

4. Для исследования уравнения Френеля применим геометрический метод. Из какой-то точки O в различных направлениях будем проводить прямые и на них откладывать отрезки, длины которых равны значениям нормальных скоростей в этих направлениях. Геометрическое место концов таких отрезков называется *поверхностью нормалей*. В кристалле каждому направлению нормали соответствуют два значения скорости. Поэтому поверхность нормалей в кристалле будет *двойной поверхностью*, т. е. состоит из двух слоев. Она представляет собой поверхность *шестого порядка* и имеет очень сложный вид. Чтобы составить представление о поверхности нормалей электромагнитных волн в кристалле, рассмотрим сечения ее координатными плоскостями XY, YZ, ZX.

Сечение плоскостью XY. Волновая нормаль лежит в плоскости XY, т. е. $N_z = 0$. Уравнение Френеля (80.8) принимает вид

$$(v^2 - a_z^2)\,[N_x^2 (v^2 - a_y^2) + N_y^2 (v^2 - a_x^2)] = 0.$$

Из него получаем два значения нормальных скоростей:

$$v_2 = a_z, \quad v_1^2 = N_x^2 a_y^2 + N_y^2 a_x^2. \tag{80.14}$$

Скорость v_2 не зависит от направления $\boldsymbol{N}$. Ей соответствует *круговое сечение* поверхности нормалей (рис. 287). Скорость v_1 изменяется с изменением направления $\boldsymbol{N}$. Ей соответствует сечение поверхности нормалей, имеющее *форму овала*. Из уравнений (80.14) следует: $v_1 \geqslant v_2$, так что круг находится целиком внутри овала. Вектор $\boldsymbol{D}$ должен быть перпендикулярен к $\boldsymbol{N}$. Из соображений симметрии ясно, что вектор $\boldsymbol{D}$ одной волны параллелен оси Z, а вектор $\boldsymbol{D}$ другой волны параллелен плоскости XY. Первому направлению вектора $\boldsymbol{D}$ соответствует *круговое сечение* поверхности нормалей, второму — *овальное*.

С е ч е н и е п л о с к о с т ь ю YZ. Волновая нормаль $\boldsymbol{N}$ лежит в плоскости YZ, т. е. $N_x = 0$. Уравнение Френеля принимает вид

$$(v^2 - a_x^2)\left[N_y^2(v^2 - a_z^2) + N_z^2(v^2 - a_y^2)\right] = 0.$$

Оно дает два значения нормальных скоростей:

$$v_1 = a_x, \quad v_2^2 = N_y^2 a_z^2 + N_z^2 a_y^2. \tag{80.15}$$

Скорость v_1 не зависит от направления $\boldsymbol{N}$. Ей соответствует *круговое сечение* поверхности нормалей и вектор $\boldsymbol{D}$, параллельный оси X.

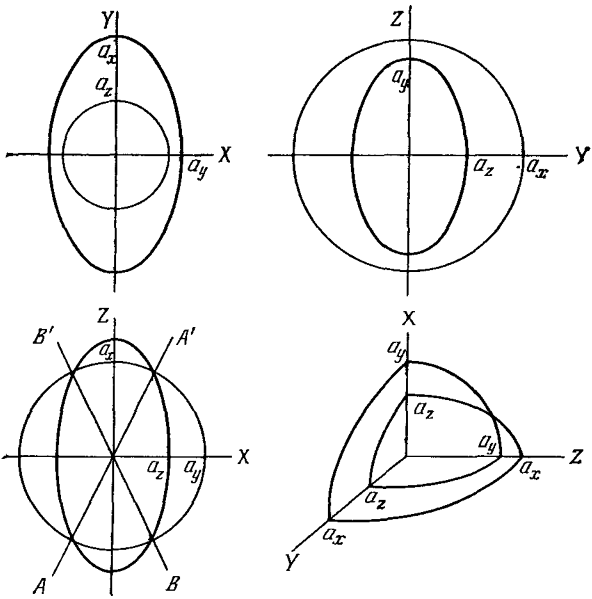

Рис. 287.

Скорость v_2 изменяется с изменением направления N. Ей соответствует *овальное сечение* поверхности нормалей и вектор $\boldsymbol{D}$, параллельный плоскости YZ. Оно целиком помещается внутри круга, так как $v_2 \leqslant v_1$, как это следует из уравнений (80.15).

С е ч е н и е п л о с к о с т ь ю ZX. Волновая нормаль N лежит в плоскости ZX, т. е. $N_y = 0$. Уравнение Френеля принимает вид

$$(v^2 - a_y^2)\left[N_z^2(v^2 - a_x^2) + N_x^2(v^2 - a_z^2)\right] = 0$$

и дает два значения нормальных скоростей:

$$v_1 = a_y, \quad v_2^2 = N_z^2 a_x^2 + N_x^2 a_z^2. \tag{80.16}$$

Скорость v_1 не зависит от направления $\boldsymbol{N}$. Ей соответствует *круговое сечение* поверхности нормалей и вектор $\boldsymbol{D}$, параллельный оси Y. Скорость v_2 изменяется с изменением направления $\boldsymbol{N}$. Ей соответствует *овальное сечение* поверхности нормалей и вектор $\boldsymbol{D}$, параллельный плоскости ZX.

5. Третий из рассмотренных случаев существенно отличается от первых двух. В первых двух случаях овал и круг не пересекаются. В третьем случае они пересекаются в четырех точках (рис. 287). Это означает, что в плоскости ZX имеются *два направления* AA' и BB', симметричные относительно оси Z, вдоль которых обе волны распространяются с одной и той же нормальной скоростью. *Направления, вдоль которых совпадают нормальные скорости волн, называются оптическими осями второго рода, осями нормалей или бинормалями.*

Если в кристалле все три главные скорости a_x, a_y, a_z различны, то в нем существуют две и только две оптические оси второго рода. Действительно, если вектор $\boldsymbol{N}$ направлен вдоль оптической оси второго рода, то должно быть $v_1 = v_2$. Ввиду соотношений (80.10), это возможно только тогда, когда $v_1 = v_2 = a_y$. Но тогда уравнение (80.8) дает $N_y^2 (a_y^2 - a_z^2)(a_y^2 - a_x^2) = 0$. Так как по предположению $a_x \neq a_y \neq a_z$, то отсюда следует, что $N_y = 0$. Это значит, что оптические оси лежат в плоскости ZX. Но в этой плоскости, как показано выше, имеются две и только две оптические оси второго рода. Они симметрично расположены относительно оси Z и наклонены к ней под некоторым углом β. Для нахождения β в уравнение $v_1 = v_2$ подставим значения v_1 и v_2 из формул (80.16). Получим

$$a_y^2 = N_z^2 a_x^2 + N_x^2 a_z^2, \quad \text{или} \quad a_y^2 (N_x^2 + N_z^2) = N_z^2 a_x^2 + N_x^2 a_z^2,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{N_x}{N_z} = \sqrt{\frac{a_x^2 - a_y^2}{a_y^2 - a_z^2}}. \tag{80.17}$$

Теперь оправдан термин «оптически двуосный кристалл», которым мы уже пользовались.

Если две из трех главных скоростей совпадают между собой ($a_x = a_y$ или $a_y = a_z$), то оптические оси сливаются в одну ось, параллельную оси Z (когда $a_x = a_y$) или оси X (когда $a_y = a_z$). Кристалл становится *оптически одноосным*. Наконец, если все три главные скорости одинаковы, то любое направление в кристалле обладает свойством оптической оси. В таких кристаллах плоские волны, независимо от их поляризации и направления, распространяются с одной и той же скоростью — кристаллы в оптическом отношении ведут себя как *изотропные среды*. К ним относятся кристаллы кубической системы [1]).

---

[1]) Необходимо, однако, отметить, что при наличии *пространственной дисперсии* кристаллы кубической системы могут быть оптически анизотропными.

ЗАДАЧИ

1. Как надо ориентировать пластинку из двуосного кристалла, чтобы получить на кристалл-рефрактометре три главных показателя преломления?

Ответ. Перпендикулярно к любой из диэлектрических осей кристалла.

2. Исходя из соображений симметрии, показать, что все кристаллы три-, тетра- и гексагональной систем оптически одноосны.

§ 81. Лучи, волновые нормали и связь между ними

1. Распространение света в кристаллах, как и любых волн в анизотропных средах, характеризуется замечательной *двойственностью*, или *взаимностью*. Она обусловлена тем, что в анизотропных средах каждой волновой нормали соответствует луч, т. е. прямая, вдоль которой происходит распространение энергии волны. Поскольку энергия распространяется с групповой скоростью, для исследования свойств лучей и обоснования самого понятия луча надо вычислить групповую скорость в анизотропной среде. В этом случае такую скорость называют также *лучевой скоростью*. Для ее вычисления воспользуемся формулой (8.16), подставив в нее $\omega = k\,v(k)$. Дифференцируя по k_l и учитывая, что $\partial k/\partial k_l = k_l/k$, получим

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_l} = v\frac{k_l}{k} + k\frac{\partial v}{\partial k_l}.$$

Отсюда для вектора групповой скорости находим

$$\boldsymbol{u} = v\boldsymbol{N} + k\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{k}}, \tag{81.1}$$

где $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{k}/k$ — единичный вектор волновой нормали, а v — *нормальная скорость*, т. е. скорость распространения фазы в направлении волновой нормали.

Групповая скорость $\boldsymbol{u}$ в анизотропной среде отличается от нормальной скорости $\boldsymbol{v}$ добавочным слагаемым $k\,\partial v/\partial \boldsymbol{k}$. Это слагаемое в свою очередь содержит составляющую вдоль нормали $\boldsymbol{N}$. Чтобы определить ее, заметим, что $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{N}$, а потому указанная составляющая равна $\boldsymbol{k}\,\partial v/\partial k$. Поэтому для самой групповой скорости $\boldsymbol{u}_N$ в направлении волновой нормали $\boldsymbol{N}$ можно написать

$$\boldsymbol{u}_N = \left(v + k\frac{\partial v}{\partial k}\right)\boldsymbol{N} = \left(v - \lambda\frac{\partial v}{\partial \lambda}\right)\boldsymbol{N}. \tag{81.2}$$

Этот результат совпадает с формулой Рэлея (8.6) для групповой скорости в изотропной среде. Этого и следовало ожидать, так как он относится не ко всему вектору групповой скорости, а только

На эту возможность указывал еще Г. А. Лорентц. Только в 1960 г. Е. Ф. Гросс и А. А. Каплянский, исследуя спектры поглощения на монокристаллических образцах Cu_2O, экспериментально обнаружили необычное для кубических кристаллов явление анизотропного поглощения света.