§ 88. Средняя плотность электромагнитной энергии в диспергирующих средах

1. Выражение для плотности электромагнитной энергии $w = (\varepsilon E^2 + \mu H^2)/(8\pi)$ получается в предположении, что ε и μ *постоянны*, т. е. не зависят от частоты ω (см. т. III, § 84). *В случае диспергирующих сред это выражение неприменимо.* Не разбирая этот вопрос в общем виде, выведем выражение для средней плотности электромагнитной энергии в непоглощающей диспергирующей среде на частном примере, принадлежащем М. Л. Левину.

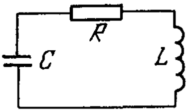

Рис. 306.

Пусть вещество с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ и магнитной проницаемостью $\mu(\omega)$ заполняет плоский конденсатор с емкостью $C = \varepsilon(\omega)\,C_0$ и тонкий соленоид с индуктивностью $L = \mu(\omega)\,L_0$, соединенные в колебательный контур (рис. 306). Здесь C_0 и L_0 — значения емкости и индуктивности для того случая, когда в пространстве между обкладками конденсатора и внутри соленоида вакуум. При отсутствии сопротивления в контуре будут совершаться свободные гармонические колебания с циклической частотой $\omega = 1/\sqrt{L(\omega)\,C(\omega)}$. Если в некоторый момент времени ввести в контур малое сопротивление R, то, начиная с этого момента, колебания сделаются затухающими и первоначально запасенная электромагнитная энергия будет переходить в джоулево тепло, выделяющееся в сопротивлении R. Полное количество тепла, выделившееся в сопротивлении R за время, когда колебания прекратятся, будет равно электромагнитной энергии, запасенной в контуре до введения сопротивления. Поэтому задача сводится к вычислению джоулева тепла.

Пусть при $t < 0$ в контуре совершаются свободные колебания:

$$I = I_0 e^{i\omega t}, \quad V = V_0 e^{i\omega t},$$

где I — сила тока в контуре, а V — напряжение на обкладках конденсатора, связанные между собой соотношением $L\dot{I} + V = 0$, или $i\omega LI + V = 0$. Если в момент $t = 0$ в контур ввести сопротивление R, то, начиная с этого момента, колебания будут описываться уравнением

$$L(\tilde{\omega})\,\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C(\tilde{\omega})} = 0,$$

откуда

$$I = I_0 e^{i\tilde{\omega} t}, \quad t > 0,$$

где $\tilde{\omega}$ — комплексная частота, определяемая уравнением

$$\tilde{\omega} L(\tilde{\omega}) - \frac{1}{\tilde{\omega} C(\tilde{\omega})} = iR.$$

Если R исчезающе мало, то $\tilde{\omega}$ должна отличаться от ω также на исчезающе малую величину. Но ω удовлетворяет уравнению

$$\omega L(\omega) - \frac{1}{\omega C(\omega)} = 0.$$

Вычитая его из предыдущего соотношения и заменяя все разности дифференциалами, получим

$$\left[\frac{d}{d\omega}(\omega L) + \frac{1}{\omega^2 C^2}\,\frac{d}{d\omega}(\omega C)\right](\tilde{\omega} - \omega) = iR,$$

откуда $\tilde{\omega} = \omega + i\delta$, причем

$$\frac{R}{\delta} = \frac{d(\omega L)}{d\omega} + \frac{1}{\omega^2 C^2}\frac{d(\omega C)}{d\omega} = \frac{d(\omega L)}{d\omega} + \frac{L}{C}\frac{d(\omega C)}{d\omega}.$$

Для определения джоулева тепла надо проинтегрировать выражение RI^2 по времени. Поскольку возведение в квадрат — нелинейная операция, необходимо перейти к вещественной форме, т. е. сделать замену

$$I \to \mathrm{Re}(I) = (I + I^*)/2.$$

Энергия, первоначально запасенная в колебательном контуре, равна

$$W = \int_0^\infty R\left(\frac{I+I^*}{2}\right)^2 dt = \frac{R\,|I_0|^2}{4}\left\{\frac{\delta}{\omega^2+\delta^2} + \frac{1}{\delta}\right\}$$

или в пределе при $\delta \to 0$

$$W = \frac{|I_0|^2}{4}\frac{R}{\delta}.$$

Подставляя сюда значение для R/δ и пользуясь соотношением $\omega L\,|I_0| = |V_0|$, получим

$$W = \frac{L_0\,|I_0|^2}{4}\frac{d(\omega\mu)}{d\omega} + \frac{C_0\,|V_0|^2}{4}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}.$$

Если бы между обкладками конденсатора и внутри соленоида был вакуум, то для средних по времени значений магнитной и электрической энергий можно было бы написать

$$\frac{L_0\,|I_0|^2}{4} = \frac{1}{8\pi}\overline{\boldsymbol{H}^2}\,\tau_m, \quad \frac{C_0\,|V_0|^2}{4} = \frac{1}{8\pi}\overline{\boldsymbol{E}^2}\,\tau_e,$$

где τ_m и τ_e — объемы соленоида и конденсатора, а $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей, когда амплитуды напряжения на конденсаторе и тока в соленоиде равны V_0 и I_0. Но при заданных V_0 и I_0 поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ не зависят от среды, заполняющей конденсатор и соленоид. Поэтому предыдущие соотношения остаются справедливыми и в том случае, когда конденсатор и соленоид заполнены веществом. Используя их, получаем следующие выражения для средних по времени значений плотностей электрической и магнитной энергий:

$$\begin{aligned} \overline{w}_e &= \frac{\overline{W}_e}{\tau_e} = \frac{1}{8\pi}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\overline{\boldsymbol{E}^2}, \\ \overline{w}_m &= \frac{\overline{W}_m}{\tau_m} = \frac{1}{8\pi}\frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\overline{\boldsymbol{H}^2}. \end{aligned} \tag{88.1}$$

Принципиальный недостаток приведенного вывода состоит в том, что в нем дифференцирование функций ωL и ωC производится вдоль *мнимой оси* (так как разность частот $\tilde{\omega} - \omega = iR$ — величина чисто мнимая), а в окончательном выражении (88.1) производится подмена дифференцированием по *вещественной переменной* ω. Так можно поступать, когда функции ωL и ωC *аналитичны*. Поэтому для полноты доказательства надо было бы доказать аналитичность этих функций, чего в выводе Левина нет. Это можно сделать в общей теории дисперсии, исследуя аналитические свойства функций $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$. Однако рассмотрение этого вопроса выходит за рамки нашей книги.

2. Смысл формулы (88.1) полезно уяснить на примере газа классических гармонических осцилляторов в монохроматическом электрическом поле с частотой ω. Вдали от собственной частоты ω_0 осциллятора можно пренебречь затуха-

нием. Тогда смещение осциллятора из положения равновесия выразится формулой

$$\boldsymbol{r} = \frac{e\boldsymbol{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

В этом случае энергия слагается из *энергии самого электромагнитного поля* (т. е. поля в вакууме) и из *энергии частиц*, находящихся в поле. Последняя энергия в свою очередь состоит из *кинетической* и *потенциальной энергии* колеблющихся осцилляторов. В статических полях кинетической энергии нет. Это приводит к формуле $w = \varepsilon E^2/(8\pi)$. В переменных полях кинетическую энергию надо учитывать, что и делается ниже.

Плотность собственно энергии электрического поля равна

$$w_1 = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^*}{2}\right)^2 = \frac{\boldsymbol{E}^2}{32\pi} + \frac{\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^*}{32\pi} + \text{компл. сопр.}$$

Плотность потенциальной энергии:

$$w_2 = \frac{Nm\omega_0^2}{2}\left(\frac{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}^*}{2}\right)^2 = \frac{Nm\omega_0^2}{8}(\boldsymbol{r}^2 + \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^*) + \text{компл. сопр.}$$

Плотность кинетической энергии:

$$w_3 = \frac{Nm}{2}\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}+\dot{\boldsymbol{r}}^*}{2}\right)^2 = -\frac{Nm\omega^2}{8}(\boldsymbol{r}^2 - \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^*) + \text{компл. сопр.}$$

Подставляя сюда выражение для $\boldsymbol{r}$ и замечая, что из формулы Зельмейера следует

$$\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} = 1 + \frac{(\varepsilon - 1)(\omega_0^2 + \omega^2)}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

получим для плотности электрической энергии:

$$w_e = \frac{\varepsilon \boldsymbol{E}^2}{32\pi} + \frac{1}{32\pi}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^*) + \text{компл. сопр.}$$

Усредняя по времени, получаем первую формулу (88 1). Для плотности магнитной энергии имеем обычное выражение, как в недиспергирующей среде.

ЗАДАЧИ

1. Рэлей предложил определять *среднюю скорость движения энергии u* в плоской бегущей волне как отношение средней плотности потока энергии к средней плотности самой энергии. Пользуясь выражением для вектора Пойнтинга, показать, что так определенная скорость в случае монохроматической электромагнитной волны совпадает с групповой скоростью.

Решение. Для средних плотностей энергии и ее потока нетрудно получить

$$\overline{w} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{dk}{d\omega}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^*), \quad \overline{S} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^*),$$

откуда и следует требуемый результат.

2. Показать, что если $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ положительны, то фазовая и групповая скорости в электромагнитной волне направлены в одну сторону.

Решение. Средняя плотность электромагнитной энергии

$$\overline{w} = \frac{1}{8\pi}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^*) + \frac{1}{8\pi}\frac{d(\omega\mu)}{8\pi}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^*)$$

— существенно положительная величина. В плоской волне $\varepsilon(\boldsymbol{EE}^*) = \mu(\boldsymbol{HH}^*)$. Поэтому

$$\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} + \frac{\mu}{\varepsilon}\frac{d(\omega\mu)}{d\omega} > 0.$$

Это неравенство должно соблюдаться для любых сред, у которых знаки ε и μ совпадают, поскольку оно выведено в предположении, что в среде может распространяться однородная монохроматическая волна, для которой $k^2 = \varepsilon\mu\omega^2/c^2 > 0$. В том же предположении имеет смысл говорить о групповой скорости. Преобразовав предыдущее неравенство к виду

$$\mu\frac{\omega}{k}\frac{d\omega}{dk} = \mu v u > 0,$$

легко получить требуемый результат.

§ 89. Поглощение света и уширение спектральных линий

1. В классической теории дисперсии поглощение (затухание) излучения учитывается формально с помощью тормозящей силы $-g\dot{r} = -2m\gamma\boldsymbol{v}$ в уравнении (84.1). Благодаря этому амплитуда колебаний убывает во времени экспоненциально по закону $\exp(-\gamma t)$, а энергия колебаний — по закону

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 e^{-2\gamma t} = \mathscr{E}_0 e^{-t/\tau}. \qquad (89.1)$$

Физическая природа тормозящей силы $-g\boldsymbol{v}$ при этом остается нераскрытой.

Планк развил теорию дисперсии и поглощения света в предположении, что колеблющийся осциллятор (электрон), двигаясь ускоренно, непрерывно теряет энергию на излучение. Эта убыль энергии на излучение определяется формулой

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3}\dot{\boldsymbol{v}}^2 \qquad (89.2)$$

(см. т. III, § 141). Применим эту формулу к осциллятору. Если потеря энергии осциллятора за период колебаний относительно мала, то колебания будут отличаться от гармонических мало. Тогда можно считать, что средние за период колебаний значения кинетической и потенциальной энергий осциллятора одинаковы, а потому среднее значение его полной энергии равно удвоенному среднему значению кинетической энергии. Но полная энергия $\mathscr{E}$ слабо затухающего осциллятора в течение периода колебаний остается почти постоянной, так что $\overline{\mathscr{E}} \approx \mathscr{E}$. В случае слабо затухающих колебаний $\boldsymbol{v} \approx \boldsymbol{v}_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$, $\dot{\boldsymbol{v}} = \omega_0 \boldsymbol{v}_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$. Возведя последнее соотношение в квадрат и усреднив по периоду колебаний, получим

$$\langle\dot{\boldsymbol{v}}^2\rangle = \omega_0^2\langle\boldsymbol{v}^2\rangle = \omega_0^2\mathscr{E}/m.$$