

получит энергию $1/2$, а тело B — энергию $31/2$ и будет нагреваться в противоречии со вторым началом термодинамики.

Решение. Свет, излученный телом B (рис. 319) и возвращающийся к нему обратно после отражения от николя N_1 , испытает при прохождении через вращающееся вещество дополнительный поворот плоскости поляризации на 45° и поэтому не пройдет через николю N_2 . Испытав в николе N_2 полное отражение, этот свет вернется (если поставит еще одно зеркало напротив S_2) к телу A . Приведенное решение парадокса Вина было дано Рэлеем,

§ 96. Временная и пространственная дисперсия. Теория естественной оптической активности

1. Многие оптические явления находят удовлетворительное объяснение в предположении, что связь между векторами D и E (а также между B и H) *локальна во времени и пространстве*. Это значит, что вектор D в любой точке пространства r и в любой момент времени t определяется значением вектора E в той же точке и в тот же момент времени. (То же относится к векторам B и H . В целях сокращения подобные замечания в дальнейшем подразумеваются, а все изложение ведется для векторов D и E .) Однако для истолкования некоторых явлений предположения о локальной связи *недостаточно*. Пространственно-временную нелокальность можно разбить на *чисто пространственную* и *чисто временную*. Отвлечемся сначала от чисто пространственной нелокальности и учтем нелокальность временную. Среда во всем дальнейшем предполагается *однородной*.

2. Временная нелокальность проявляется в *оптической дисперсии среды*. Действительно, для истолкования дисперсии необходимо учитывать *инерционные* свойства электронов, атомных ядер и ионов вещества. А такая инерционность и приводит к нелокальной связи по времени между D и E . Пренебрегая пространственной нелокальностью, будем рассуждать так, как если бы во всем пространстве электромагнитное поле было *однородно* и менялось *только во времени*. Действием магнитного поля будем пренебрегать. Рассмотрим сначала *импульсные воздействия* на среду. Допустим, что от момента $t = 0$ в течение времени dt среда подверглась воздействию электрического поля E , а по истечении этого промежутка поле в среде снова обратилось в нуль. Такое воздействие может рассматриваться как *электрический толчок*, возбуждающий регулярные колебания электронов, атомных ядер и ионов среды. Эти колебания не прекращаются после прекращения действия поля, но продолжают дальше в силу *конечности масс* колеблющихся частиц. В этом и проявляется временная нелокальность связи между отклонением частиц из положений равновесия и электрическим полем, а следовательно, между поляризацией P или индукцией D среды и полем E .

В рамках *линейной электродинамики* поляризация среды dP , вызванная электрическим толчком, пропорциональна $E dt$. Пред-

полагая, что среда *однородна и изотропна*, для вектора $d\mathbf{P}$ в момент времени t можно написать

$$d\mathbf{P}(t) = f(t) \mathbf{E}(0) dt, \quad (96.1)$$

где функция $f(t)$ зависит только от свойств среды и от времени t , которое прошло с момента действия толчка до момента наблюдения. Функция $f(t)$ должна обращаться в нуль при $t = 0$, так как из-за своей инерционности электроны, атомные ядра и ионы не могут мгновенно получить конечные смещения. Она должна обращаться в нуль и при $t = \infty$, так как все реальные среды *диссипативны*, так что всякое свободное колебание в них должно в конце концов затухнуть.

Если поле \mathbf{E} действует в течение длительного промежутка времени, то этот промежуток можно разбить на бесконечно малые промежутки и таким путем свести воздействие электрического поля на среду к действию последовательных толчков. Вклад в поляризацию среды в момент времени t , внесенный более ранним электрическим толчком $\mathbf{E}(t') dt'$, будет $d\mathbf{P}(t) = f(t - t') \mathbf{E}(t') dt'$. В линейной электродинамике справедлив *принцип суперпозиции*, а потому полный вектор поляризации в момент времени t будет

$$\mathbf{P}(t) = \int_{-\infty}^t f(t - t') \mathbf{E}(t') dt', \quad (96.2)$$

или, вводя новую переменную интегрирования $\vartheta = t - t'$,

$$\mathbf{P}(t) = \int_0^{\infty} f(\vartheta) \mathbf{E}(t - \vartheta) d\vartheta. \quad (96.3)$$

Следовательно,

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{E}(t) + 4\pi \int_0^{\infty} f(\vartheta) \mathbf{E}(t - \vartheta) d\vartheta. \quad (96.4)$$

Интегрирование производится по времени, *предшествующему* рассматриваемому моменту t . Этого требует *принцип причинности*. В своей нерелятивистской форме он означает, что *каждое событие определяется только прошедшими событиями, но не может зависеть от будущих*.

Если $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t)$, то после подстановки этого выражения в (96.4) получится

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(t), \quad (96.5)$$

где

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi \int_0^{\infty} f(\vartheta) e^{-i\omega\vartheta} d\vartheta. \quad (96.6)$$

Таким образом, для монохроматического поля связь между \mathbf{D} и \mathbf{E}

формально может быть записана в локальной форме с помощью диэлектрической проницаемости как функции частоты ω . Оптическая дисперсия, т. е. зависимость ϵ от ω , эквивалентна *нелокальной связи по времени между $\mathbf{D}(t)$ и $\mathbf{E}(t)$* . Поэтому такую дисперсию называют *временной или частотной дисперсией*, в отличие от *пространственной дисперсии*, о которой говорится ниже.

3. Учтем теперь *пространственную нелокальность*. Если электрическое поле *неоднородно*, то для нахождения индуцированного дипольного момента молекулы недостаточно знать вектор \mathbf{E} в одной точке пространства, а требуется знание *функции $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ во всем объеме, занимаемом молекулой*. Это эквивалентно знанию поля \mathbf{E} и его пространственных производных всех порядков в какой-то одной точке внутри молекулы (которую условно можно назвать *центром молекулы*), так как тогда функция $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ представится рядом Тэйлора по координатам x_1, x_2, x_3 вектора \mathbf{r} .

Легко оценить порядок последовательных членов этого ряда в монохроматическом поле световой волны. Производная $\partial E_l / \partial x_m$ будет порядка E/λ , а координата x_m — порядка размеров молекулы a , так что член $x_m \cdot \partial E_l / \partial x_m$ будет порядка $(a/\lambda) E$. Так же оцениваются и порядки членов, содержащих высшие производные. Если нулевой член ряда принять за единицу, то члены, содержащие первые, вторые и последующие производные, будут порядка $a/\lambda, (a/\lambda)^2, (a/\lambda)^3$ и т. д.

Как видно, в неоднородном поле связь между индуцированным дипольным моментом молекулы и электрическим полем \mathbf{E} *пространственно нелокальна*. Это ведет к *пространственной нелокальности связи между \mathbf{P} и \mathbf{E} , а также между \mathbf{D} и \mathbf{E}* . При этом в слабых электрических полях, с которыми имеют дело линейная электродинамика и оптика, можно пренебречь влиянием квадратов и высших степеней поля \mathbf{E} и его пространственных производных. В этом «линейном приближении» в монохроматическом поле световой волны можно написать

$$D_j = \epsilon_{jl} E_l + \gamma_{jlm} \frac{\partial E_l}{\partial x_m} + \alpha_{jlmn} \frac{\partial^2 E_l}{\partial x_m \partial x_n} + \dots \quad (96.7)$$

Для общности предполагается, что среда *анизотропна*. Ее оптические свойства характеризуются тензорами $\epsilon_{jl}, \gamma_{jlm}, \dots$, являющимися функциями частоты ω . В соответствии с общепринятой тензорной символикой по дважды встречающимся координатным индексам подразумевается суммирование. Как выяснено выше, если нулевой член ряда (96.7) принять за единицу, то последующие члены будут порядка $a/\lambda, (a/\lambda)^2$ и т. д.

В случае плоской монохроматической волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})$$

дифференцирование по координате x_m сводится к умножению

на $-ik_m$. Поэтому соотношение (96.7) можно записать в виде

$$D_j(\mathbf{r}, t) = \epsilon_{jl}(\omega, \mathbf{k}) E_l(\mathbf{r}, t), \quad (96.8)$$

где введено обозначение

$$\epsilon_{jl}(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon_{jl}(\omega) - ik_m \gamma_{jlm} + (-ik_m)(-ik_n) \alpha_{jlmn} + \dots \quad (96.9)$$

Таким образом, в поле плоской монохроматической волны связь между \mathbf{D} и \mathbf{E} опять принимает формально локальный характер. Однако тензор диэлектрической проницаемости $\epsilon_{jl}(\omega, \mathbf{k})$ теперь зависит не только от ω , но и от \mathbf{k} . Зависимость этого тензора от волнового вектора \mathbf{k} называется *пространственной дисперсией*.

4. Ввиду малости параметра a/λ эффекты пространственной дисперсии в оптике *малы* и трудно наблюдаемы. Долгое время единственно известным из таких эффектов было *естественное вращение плоскости поляризации*. Оно наблюдается в таких средах, у которых тензор γ_{jlm} отличен от нуля.

Найдем вид тензора γ_{jlm} для дисимметрично изотропных сред — жидкостей и кристаллов кубической системы, у которых тензор $\epsilon_{jl}(\omega)$ вырождается в скаляр. Отбросив в выражении (96.7) все члены, содержащие тензоры четвертого и высших порядков, напомним

$$D_j(\mathbf{r}, t) = \epsilon E_j(\mathbf{r}, t) + \gamma_{jlm} \frac{\partial E_l}{\partial x_m}. \quad (96.10)$$

В развернутом виде для x -составляющей вектора \mathbf{D} это соотношение гласит

$$D_x = \epsilon E_x + \gamma_{xxx} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \gamma_{xxy} \frac{\partial E_x}{\partial y} + \gamma_{xxz} \frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma_{xyx} \frac{\partial E_y}{\partial x} + \\ + \gamma_{xyy} \frac{\partial E_y}{\partial y} + \gamma_{xyz} \frac{\partial E_y}{\partial z} + \gamma_{xzx} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma_{xzy} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma_{xzz} \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (96.11)$$

Повернем теперь координатную систему вокруг оси X на угол 90° (рис. 320). Ввиду изотропии среды, все коэффициенты в предыдущем соотношении останутся неизменными. Однако y и E_y перейдут в $-z$ и $-E_z$, а z и E_z — в y и E_y . Остальные координаты и компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{D} останутся неизменными. Произведя в (96.11) соответствующую замену, получим

$$D_x = \epsilon E_x + \gamma_{xxx} \frac{\partial E_x}{\partial x} - \gamma_{xxy} \frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma_{xxz} \frac{\partial E_x}{\partial y} - \gamma_{xyx} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \\ + \gamma_{xyy} \frac{\partial E_z}{\partial z} - \gamma_{xyz} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma_{xzx} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \gamma_{xzy} \frac{\partial E_y}{\partial z} + \gamma_{xzz} \frac{\partial E_y}{\partial y}. \quad (96.11a)$$

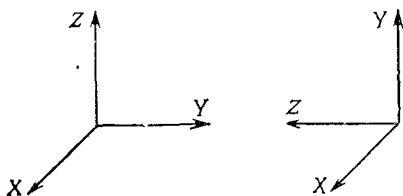


Рис. 320.

Но в силу определения тензора γ_{ilm} в повернутой системе координат соотношение между D_x и компонентами вектора E можно записать в прежней форме (96.11). Сравнение обоих соотношений дает $\gamma_{xxy} = \gamma_{xxz}$, $\gamma_{xxz} = -\gamma_{xxy}$, откуда $\gamma_{xxy} = \gamma_{xxz} = 0$ и т. д. Кроме того, $\gamma_{xyy} = -\gamma_{xzy}$ и т. д.

Что касается коэффициента γ_{xxx} , то он равен нулю. Действительно, в силу симметрии $\gamma_{xxx} = \gamma_{yyy} = \gamma_{zzz}$. Повернем исходную систему координат вокруг оси Z на угол 90° , чтобы ось Y приняла отрицательное направление прежней оси X . Тогда в (96.11), оставляя коэффициенты неизменными, следует сделать замену $x \rightarrow -y$, $D_x \rightarrow -D_y$, $E_x \rightarrow -E_y$, что дает

$$-D_y = -\epsilon E_y + \gamma_{xxx} \frac{\partial E_y}{\partial y} + \dots$$

С другой стороны, на основании определения тензора γ_{ilm} в повернутой системе можно сразу написать

$$D_y = \epsilon E_y + \gamma_{yyy} \frac{\partial E_y}{\partial y} + \dots$$

Отсюда, ввиду равенства $\gamma_{xxx} = \gamma_{yyy}$, получаем $\gamma_{xxx} = 0$.

Таким образом, все компоненты тензора γ_{ilm} обращаются в нуль, если какие-либо два из индексов j, l, m одинаковы, независимо от значения третьего индекса. Отличны от нуля только компоненты, у которых все три индекса различны. При этом при перестановке любых соседних индексов составляющая тензора γ_{ilm} меняет знак. Следовательно, можно написать

$$\gamma_{xyz} = -\gamma_{yxz} = \gamma_{yzx} = -\gamma_{zyx} = \gamma_{zxy} = -\gamma_{xzy} = -g. \quad (96.12)$$

В результате (96.11) перейдет в

$$D_x = \epsilon E_x + g \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right),$$

или в векторной форме

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + g \operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (96.13)$$

Если каждая точка среды является *центром симметрии*, то при отражении в этом центре среда переходит сама в себя, а потому тензор γ_{ilm} при таком отражении должен оставаться неизменным. Но при этом правая система координат переходит в левую, а знаки координат x, y, z и компонент полярных векторов E и D меняются на противоположные, так что (96.10) переходит в

$$-D_j = -\epsilon E_j + \gamma_{ilm} \frac{\partial E_l}{\partial x_m}.$$

Следовательно, $\gamma_{ilm} = 0$, т. е. вращение плоскости поляризации невозможно. Для возможности вращения необходимо, чтобы молекулы жидкости или кристаллов кубической системы *не имели центров симметрии*.

Заметим еще, что в случае изотропной естественно-активной среды величина g есть *псевдоскаляр*, а не истинный скаляр (см. т. I, § 7). При переходе от правой системы координат к левой или наоборот знак этой величины меняется на противоположный. Это непосредственно видно из соотношения (96.12), которое показывает, что γ_{jlm} есть *полностью антисимметричный псевдотензор*.

5. По аналогии с формулой (96.13) можно написать

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + g' \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad (96.14)$$

где g' — новый *псевдоскаляр*. Магнитную проницаемость μ мы при этом приняли равной единице. Введение добавочного члена $g' \operatorname{rot} \mathbf{H}$ необходимо для выполнения закона сохранения энергии. Действительно, используя уравнения Максвелла, приведем соотношения (96.13) и (96.14) к виду

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} - \frac{g}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + \frac{g'}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Эти уравнения можно упростить. Для этого подставим второе выражение в первое, а первое во второе и отбросим при этом произведение gg' , как величину *более высокого порядка малости*. Тогда получим

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} - \frac{g}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + \frac{\varepsilon g'}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (96.15)$$

Теперь воспользуемся результатом электродинамики, согласно которому величина $\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{B}}$ равна производной по времени от (умноженной на 8π) плотности электромагнитной энергии (см. т. III, § 84). Используя (96.15), преобразуем это выражение к виду

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{B}} = (\varepsilon \mathbf{E}\dot{\mathbf{E}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{H}}) + \frac{1}{c} (\varepsilon g' \mathbf{E}\dot{\mathbf{E}} - g \mathbf{H}\dot{\mathbf{H}}).$$

Первый член справа есть производная от $\frac{1}{2} (\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)$. Следовательно, и второй член должен быть производной по времени от некоторой функции. Это будет действительно так, если выполняется соотношение $\varepsilon g' = g$, так как тогда

$$\varepsilon g' \mathbf{E}\dot{\mathbf{E}} - g \mathbf{H}\dot{\mathbf{H}} = g \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}\dot{\mathbf{E}} - \mathbf{H}\dot{\mathbf{H}}).$$

Тем самым доказана необходимость введения второго члена в формуле (96.14), а формулы (96.15) приводятся к окончательному виду

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} - \frac{g}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + \frac{g}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (96.16)$$

6. Теперь мы располагаем полной системой уравнений для монохроматических волн в однородной естественно-активной среде.

Из уравнений $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ следует, что плоские волны в такой среде *поперечны относительно векторов \mathbf{D} и \mathbf{B}* . Они *поперечны также относительно векторов \mathbf{E} и \mathbf{H}* , так как из уравнений (96.13) и (96.14) следует, что $\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$. Подставив далее выражения (96.16) в уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{g}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{g}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{g}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (96.17)$$

Допустим, что волна плоская и распространяется в положительном направлении оси Z . Тогда отличными от нуля будут только компоненты E_x и E_y , H_x и H_y , причем эти величины зависят только от одной координаты z . С учетом этого запишем уравнения (96.17) в координатной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} - \frac{g}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{g}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (96.18)$$

и аналогично для производных $\partial H_x / \partial z$ и $\partial H_y / \partial z$. Здесь все величины вещественные. Для упрощения рассуждений удобно ввести комплексные комбинации

$$\begin{aligned} E_+ &= E_x + iE_y, & E_- &= E_x - iE_y, \\ H_+ &= H_x + iH_y, & H_- &= H_x - iH_y. \end{aligned} \quad (96.19)$$

Вещественная часть комплексного числа E_+ дает компоненту E_x , а коэффициент при мнимой части — компоненту E_y , и т. д. Однако при исследовании явлений круговой поляризации удобнее оперировать непосредственно с самими комплексными комбинациями, не переходя к вещественной форме. Например, если совершаются гармонические колебания $E_x = A \cos \omega t$, $E_y = A \sin \omega t$, то $E_+ = = Ae^{i\omega t}$. Точка, изображающая комплексное число E_+ , движется в комплексной плоскости по кругу в направлении от оси X к оси Y , т. е. представляет *волну, поляризованную по левому кругу*. Аналогично, комплексная комбинация E_- описывает *волну, поляризованную по правому кругу*.

Умножив второе уравнение (96.18) на i , почленным сложением и вычитанием этих уравнений найдем выражения для производ-

ных $\partial E_+/\partial z$ и $\partial E_-/\partial z$. Аналогично поступаем с магнитным полем. В результате получим

$$\frac{\partial E_+}{\partial z} = \frac{i}{c} \frac{\partial H_+}{\partial t} + \frac{ig}{c^2} \frac{\partial^2 E_+}{\partial t^2}, \quad (96.20)$$

$$\frac{\partial H_+}{\partial z} = -\frac{i\varepsilon}{c} \frac{\partial E_+}{\partial t} + \frac{ig}{c^2} \frac{\partial^2 H_+}{\partial t^2}.$$

$$\frac{\partial E_-}{\partial z} = -\frac{i}{c} \frac{\partial H_-}{\partial t} - \frac{ig}{c^2} \frac{\partial^2 E_-}{\partial t^2}, \quad (96.21)$$

$$\frac{\partial H_-}{\partial z} = \frac{i\varepsilon}{c} \frac{\partial E_-}{\partial t} - \frac{ig}{c^2} \frac{\partial^2 H_-}{\partial t^2}.$$

Уравнения разделились на две группы *независимых уравнений*. В одну группу входят комбинации E_+ и H_+ , описывающие волны с левой круговой поляризацией, в другую — комбинации E_- и H_- , которым соответствует правая круговая поляризация. Ввиду однотипности обеих групп достаточно исследовать одну из них, например группу (96.20). Исключим из нее стандартным способом величину H_+ . Отбрасывая члены, содержащие g^2 , получим

$$\frac{\partial^2 E_+}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E_+}{\partial t^2} + \frac{2ig}{c^2} \frac{\partial^3 E_+}{\partial t^2 \partial z}$$

и такое же уравнение для H_+ . В монохроматической плоской волне $E_+ = C \exp i(\omega t - kz)$ дифференцирование по z эквивалентно умножению на $-ik$. Поэтому

$$\frac{\partial^2 E_+}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon'}{c^2} \frac{\partial^2 E_+}{\partial t^2} + \frac{2gk}{c^2} \frac{\partial^2 E_+}{\partial t^2}.$$

Здесь в последнем члене вместо k можно подставить волновое число в нулевом приближении, т. е. $k = \omega \sqrt{\varepsilon}/c$. Тогда получится волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 E_+}{\partial z^2} = \frac{1}{v_+^2} \frac{\partial^2 E_+}{\partial t^2}, \quad (96.22)$$

в котором

$$v_+ = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{[1 + 2g\omega/c \sqrt{\varepsilon}]^{1/2}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{g\omega}{\varepsilon},$$

или

$$v_+ = \frac{c}{n} - \frac{g\omega}{n^2}, \quad (96.23)$$

где n — показатель преломления среды. Аналогично, для волны с левой круговой поляризацией

$$v_- = \frac{c}{n} + \frac{g\omega}{n^2}. \quad (96.24)$$

Скорости v_+ и v_- различны. Поэтому должно существовать *круговое двойное лучепреломление*, а следовательно, и *вращение плоскости поляризации*.

Убедимся еще, что в каждой поляризованной по кругу плоской волне электрический и магнитный векторы взаимно перпендикулярны. Для этого в уравнениях (96.20) достаточно произвести замену $\partial/\partial t \rightarrow i\omega$, $\partial/\partial z \rightarrow -ik$. Тогда первое уравнение перейдет в

$$\frac{\omega}{c} H_+ = i \left(k - \frac{g\omega^2}{c} \right) E_+.$$

Отсюда видно, что отношение E_+/H_+ чисто мнимое, а это эквивалентно утверждению, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} в рассматриваемой волне взаимно перпендикулярны.

7. В средах, обладающих центром симметрии, разложение (96.9) тензора $\epsilon_{jl}(\omega, \mathbf{k})$ не может содержать линейных членов по \mathbf{k} . В таких случаях пространственная дисперсия может быть обусловлена квадратичными членами. С ней связана слабая зависимость поглощения кубических кристаллов закиси меди Cu_2O от поляризации света (Гросс и Каплянский, 1960 г.), а также слабая анизотропия показателя преломления кубических кристаллов кремния (Пастернак и Ведам, 1971 г.). Эффекты очень малы, так как они определяются квадратом $(a/\lambda)^2$, т. е. величиной порядка 10^{-6} — 10^{-5} (a — размер молекулы или постоянная кристаллической решетки). Существуют и другие эффекты пространственной дисперсии, в обсуждение которых мы входить не будем.

§ 97. О тепловых флуктуациях

В этом вспомогательном параграфе сообщаются краткие сведения о тепловых флуктуациях, необходимые для изложения вопросов молекулярного рассеяния света.

1. Пусть f — любая флуктуирующая величина. Флуктуацией этой величины называется отклонение $\Delta f = f - \bar{f}$ мгновенного значения этой величины от ее среднего значения. Обычно пользуются средним квадратом флуктуации, т. е. величиной $\overline{(\Delta f)^2}$. Квадратный корень из этой величины $\sqrt{\overline{(\Delta f)^2}}$ называется *среднеквадратичной флуктуацией*, а ее отношение к среднему значению \bar{f} , т. е. $\sqrt{\overline{(\Delta f)^2}}/\bar{f}$, — *среднеквадратичной относительной флуктуацией*.

Усредняя выражение $(\Delta f)^2 = (f - \bar{f})^2 = f^2 - 2f\bar{f} - (\bar{f})^2$, получим

$$\overline{(\Delta f)^2} = \bar{f}^2 - 2\bar{f}\bar{f} - (\bar{f})^2.$$

Но \bar{f} — величина постоянная, а потому $\overline{f\bar{f}} = \bar{f}\bar{f} = (\bar{f})^2$. Следовательно,

$$\overline{(\Delta f)^2} = \bar{f}^2 - (\bar{f})^2. \quad (97.1)$$

Усредним теперь произведение двух флуктуирующих величин:

$$fg = (\bar{f} + \Delta f)(\bar{g} + \Delta g) = \bar{f}\bar{g} + \bar{g}\Delta f + \bar{f}\Delta g + \Delta f\Delta g.$$

Так как \bar{f} и \bar{g} — величины постоянные, а $\overline{\Delta f} = \overline{\Delta g} = 0$, то

$$\overline{fg} = \bar{f}\bar{g} + \overline{\Delta f\Delta g}. \quad (97.2)$$

Формула (97.1) содержится здесь как частный случай, если взять $f = g$.