а на полотне — среднюю точку C между A и B. Пусть в точку C вспышки от молний приходят одновременно. Тогда с точки зрения системы S удары молний в концы поезда будут событиями одновременными. Но в момент встречи обеих вспышек точка C' окажется правее C. В этот момент вспышка от B' уже прошла через C', а от A' еще не дошла. Значит, с точки зрения системы S' удар молнии в B' произошел раньше удара в A'.

Теперь ясно, как разрешается парадокс, о котором говорилось в пункте 1. Свет доходит до сферы Σ одновременно в системе отсчета S, но не одновременно в системе S'. Аналогично, до сферы Σ' свет доходит одновременно с точки зрения системы отсчета S', но не одновременно с точки зрения системы S.

Дорелятивистская физика развивалась, и вполне успешно, считая время и одновременность *абсолютными*, т. е. одинаковыми во всех системах отсчета. Но так происходило лишь до тех пор, пока рассматривались *медленные движения*. А распространение света есть быстрый процесс. Вот почему именно в оптике физика встретилась раньше всего с принципиальными трудностями, преодоленными теорией относительности.

§ 105. Преобразование координат и времени в теории относительности

1. Рассмотрим две инерциальные системы отсчета S и S', из которых вторая движется относительно первой прямолинейно и равномерно со скоростью V, а следовательно, первая движется относительно второй со скоростью $-V$. В каждой системе отсчета расставлены достаточно часто одинаковые часы, неподвижные в этой системе и синхронизованные по правилу Эйнштейна. Пусть x, y, z, t — координаты и время какого-либо события (например, столкновения двух шаров) в системе отсчета S, а x', y', z', t' — координаты и время того же события в системе отсчета S'. Возникает вопрос, как по значениям x, y, z, t найти значения x', y', z', t' и наоборот. Решение этого вопроса основано на предположении, что пространство *однородно* и *изотропно*, а время *однородно* [1]). Однородность пространства и времени означает, что все точки пространства и все моменты времени, как в системе S, так и в системе S', абсолютно эквивалентны. Изотропия же пространства означает полную эквивалентность всех пространственных направлений в системе S, а также в системе S'. В силу указанной однородности и изотропии пространства и времени связь между x, y, z, t и x', y', z', t' должна быть *линейной*.

[1]) Эти свойства нельзя рассматривать как априорные. Они установлены и проверены экспериментально. Их объяснение, по-видимому, должна дать космология при рассмотрении происхождения и эволюции Вселенной в целом.

Вопрос о чисто пространственных преобразованиях координат в этих предположениях решается в аналитической геометрии. Поэтому можно отвлечься от этого вопроса и сосредоточить все внимание на том, что нового вносит в преобразование координат и времени равномерное движение одной системы отсчета относительно другой. Для этой цели достаточно рассмотреть частный случай, когда начала O и O' координатных систем S и S' в некоторый момент времени совмещаются. Этот момент мы примем за начало отсчета времени как в системе S, так и в системе S'. Тогда связь между x, y, z, t и x', y', z', t' будет не только линейной, но и *однородной*, так как нулевым значениям нештрихованных параметров соответствуют также нулевые значения штрихованных. Кроме того, оси X', Y', Z' координатной системы S' можно выбрать так, чтобы они были параллельны осям X, Y, Z координатной системы S и, следовательно, ось X' все время совмещалась с осью X (рис. 328).

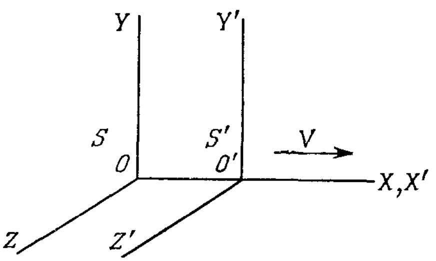

Рис. 328.

2. Предположим, что относительная скорость V координатных систем S и S' меньше скорости света c ($V < c$). Пусть при этом условии из начала координат O в момент времени $t_1 > 0$ (по часам системы S) послан световой сигнал в положительном направлении оси X. Пусть этот сигнал приходит в точку O' в момент времени t' (по часам системы S'). Тогда, ввиду линейности связи между координатами и временем в системах S и S', время t' должно выражаться также линейно через t_1. При этом нулевому значению t_1 соответствует нулевое значение t', так как в момент $t = t'$ начала координат O и O' совмещаются между собой. Следовательно, должно быть

$$t' = kt_1, \tag{105.1}$$

где k — некоторый коэффициент. В силу изотропии пространства он может зависеть только от абсолютного значения скорости V, но не от ее направления.

Выразим коэффициент k через скорость V. Пусть в точке O' световой сигнал отражается и, распространяясь в обратном направлении, возвращается в точку O в момент t_2 (по часам системы S). Тогда, ввиду полной эквивалентности систем отсчета S и S',

$$t_2 = kt', \tag{105.2}$$

где k имеет то же значение, что и в формуле (105.1). Исключив t', получим

$$t_2 = k^2 t_1. \tag{105.3}$$

Согласно эйнштейновскому правилу синхронизации часов сигнал, посланный из O в момент t_1 и возвратившийся обратно в момент t_2, отражается в точке O' в момент времени

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1 + k^2}{2} t_1 \tag{105.4}$$

(по часам системы S). Расстояние x, проходимое точкой O' за время t, равно $x = Vt$. То же расстояние свет проходит за время $t - t_1$, и следовательно, $x = c\,(t - t_1)$. Таким образом, $Vt = c\,(t - t_1)$. Подставив сюда значение t из предыдущей формулы, получим

$$V\,(k^2 + 1) = c\,(k^2 - 1), \tag{105.5}$$

откуда

$$\frac{V}{c} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}, \tag{105.6}$$

$$k^2 = \frac{c + V}{c - V} = \frac{1 + V/c}{1 - V/c}. \tag{105.7}$$

Извлекая из последнего выражения квадратный корень, найдем k. После этого получаем две вспомогательные формулы:

$$k + \frac{1}{k} = \frac{2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad k - \frac{1}{k} = \frac{2V/c}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \tag{105.8}$$

которые понадобятся нам в дальнейшем. Все эти соотношения, разумеется, имеют смысл только при условии $V < c$.

Отметим, в частности, что из формул (105.1) и (105.4) следует

$$\frac{t'}{t} = \frac{2k}{k^2 + 1} = \sqrt{1 - (V/c)^2}, \tag{105.9}$$

откуда $t' < t$. Величина t есть время движения точки O' из неподвижного начала O до точки, в которой его догонит световой сигнал, измеренное по «неподвижным часам», т. е. часам системы S. Величина t' имеет смысл того же времени, но измеренного уже по «движущимся часам», т. е. часам системы S'. Таким образом, величины t и t' представляют собой времена между одними и теми же событиями, измеренные соответственно в «неподвижной» S и «движущейся» S' системах отсчета. Формула (105.9) показывает, что движущиеся часы идут медленнее неподвижных. Это явление будет обсуждено ниже с различных точек зрения, а сейчас мы вернемся к вопросу о преобразовании координат и времени.

3. Пусть на оси X произошло какое-то событие A, например столкновение двух шаров (рис. 329). В системе отсчета S это событие характеризуется абсциссой x и моментом времени t. В системе отсчета S' абсцисса и время того же события будут x', t'. Рассмотрим световой сигнал, отправляющийся из начала координат O к месте события A (рис. 329, a). На прохождение расстояния OA сигнал затрачивает время x/c. Чтобы он пришел в A в момент t, его надо отправить из O в момент $t_1 = t - x/c$. На прохождение расстояния $O'A$ тот же сигнал затрачивает время x'/c, так что он проходит через точку O' в момент $t_1' = t' - x'/c$. По определению коэффициента k $t_1' = kt_1$ или $t' - x'/c = k(t - x/c)$. Отразим теперь световой сигнал в A в обратном направлении (рис. 329, *б*). Через точку O' он пройдет в момент времени $t_2' = t' + x'/c$, а через точку O — в момент $t_2 = t + x/c$. Теперь роли штрихованных и нештрихованных величин поменялись местами, и на основании того же определения коэффициента k можно написать $t_2 = kt_2'$, или $t + x/c = k(t' + x'/c)$. Таким образом,

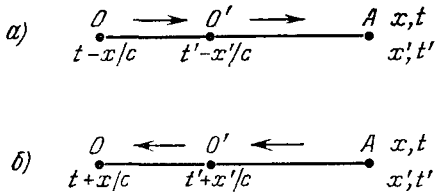

Рис. 329.

$$t' - x'/c = k(t - x/c), \quad k(t' + x'/c) = t + x/c. \qquad (105.10)$$

Полученные соотношения справедливы, в каком бы месте оси X ни произошло событие A. Пусть, например, оно произошло левее точек O и O', как указано на рис. 330, *а*. Отправим от места события световой сигнал вправо. Так как теперь x и x' отрицательны, то сигнал достигнет точек O и O' в более поздние моменты $t - x/c$ и $t' - x'/c$. На основании определения коэффициента k напишем $t' - x'/c = k(t - x/c)$, а это есть первое соотношение (105.10). Возьмем теперь световой сигнал, распространяющийся справа налево (рис. 330, *б*). Пусть он достигает точки A в моменты t и t' по часам в системах S и S' соответственно. Через точки O и O' сигнал пройдет в моменты времени $t + x/c$ и $t' + x'/c$, а потому $t' + x'/c = k(t' - x'/c)$, т. е. получается и второе соотношение (105.10).

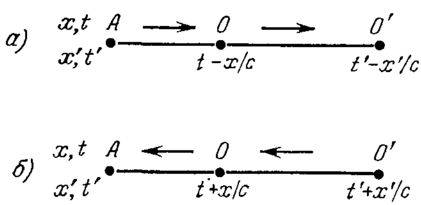

Рис. 330.

Очень полезно рассмотреть все случаи взаимного расположения точек A, O, O' и убедиться, что во всех случаях справедливы соотношения (105.10).

Из соотношений (105.10) находим

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)x - \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right)ct, \\ t' &= \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)t - \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right)\frac{x}{c}, \end{aligned} \qquad (105.11)$$

или на основании (105.8)

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{105.12}$$

где введено обозначение

$$\beta = V/c. \tag{105.13}$$

Мы добавили формулы $y' = y$, $z' = z$, которые показывают, что поперечные координаты события y и z не преобразуются. Для доказательства последнего утверждения изготовим в системах отсчета S и S' одним и тем же способом два одинаковых твердых стержня, каждый из которых неподвижен в своей системе отсчета. Установим их своими концами на оси X параллельно осям Y и Y' (рис. 331). Длины стержней y и y', измеренные соответственно в системах S и S', конечно, будут одинаковы. Но это еще не означает, что справедливо второе уравнение (105.12). Надо еще показать, что y и y' можно рассматривать как координаты *одного и того же события*. Для доказательства этого к свободным концам стержней прикрепим маленькие шарики A и A'. Пусть сначала шарик A' расположен левее шарика A. Мы утверждаем, что при движении шарик A' обязательно столкнется с шариком A. Действительно, если бы движущийся шарик прошел выше или ниже неподвижного, то системы отсчета S и S' не были бы эквивалентны. Но если шарики столкнутся, то y и y' становятся координатами одного и того же события — столкновения шариков, и второе уравнение (105.12) может считаться доказанным. Так же доказывается и третье уравнение (105.12).

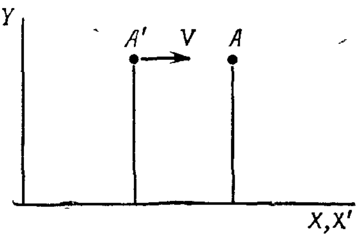

Рис. 331.

Формулы (105.12) и решают задачу о преобразовании координат и времени при переходе от одной системы отсчета к другой. Они называются *преобразованием Лорентца* (этот термин был введен Пуанкаре). Лорентц получил их в 1904 г. К тем же формулам несколько раньше (в 1900 г.) пришел Лармор. И Лармор, и Лорентц, однако, принципиально стояли на точке зрения неподвижного эфира. У них истинным было только время t в системе отсчета, в которой эфир покоится. Величина же t' лишь формально играла роль времени — это была математическая переменная, вводимая таким образом, чтобы соблюдалась инвариантность уравнений электродинамики при переходе от переменных x, y, z, t к переменным x', y', z', t'. Настоящий вывод формул преобразования Лорентца и установление их истинного смысла дал Эйнштейн в 1905 г. В его теории все инерциальные системы отсчета совершенно эквивалентны, а t' является таким же «истинным временем», как и t. Это проявляется, в частности, если уравнения (105.12) разрешить относительно x, y, z, t. Таким путем получатся формулы «обратного преобразования»

$$x=\frac{x'+Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y=y', \quad z=z', \quad t=\frac{t'+Vx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{105.14}$$

имеющие тот же вид, что и формулы «прямого преобразования» (105.12). Как и следовало ожидать, они получаются из формул (105.12) простой заменой V на $-V$.

Формулы (105.12) и (105.14) при $\beta>1$ дали бы мнимые значения для координат и времени. Поэтому нет смысла говорить о движении одной системы отсчета со скоростью V, превышающей скорость света c. Отсюда следует, что скорость любого тела не может превышать c, так как с каждым телом можно связать систему отсчета.

При медленных движениях, когда $(V/c)^2 \ll 1$ и $Vv/c^2 \ll 1$ (v — скорость движения тела), преобразование Лорентца, как и следовало ожидать, в пределе переходит в преобразование Галилея.

4. В дорелятивистской физике пространство и время считались *независимыми* друг от друга. Расстояния между двумя пространственными точками (точнее, расстояния между двумя материальными точками в один и тот же момент времени), а также промежутки времени между двумя событиями считались *одинаковыми во всех системах отсчета*. Иными словами, обе эти величины считались *инвариантными* при переходе от одной системы отсчета к другой. В теории относительности такая инвариантность была утрачена. Вместо двух инвариантов — пространственного и временного — в ней сохранился только *один, пространственно-временной, инвариант*. Его легко найти, перемножая почленно уравнения (105.11). Это дает

$$c^2t^2-x^2=c^2t'^2-x'^2=\mathrm{Inv}. \tag{105.15}$$

Для удобства запишем этот инвариант через новые временные переменные

$$\tau=ct, \quad \tau'=ct', \tag{105.16}$$

имеющие размерность длины. Введение таких переменных означает, что промежутки времени теперь измеряются теми же единицами, что и пространственные расстояния: за единицу времени принимается время, в течение которого свет проходит единицу расстояния. В новых переменных

$$\tau^2-x^2=\tau'^2-x'^2=\mathrm{Inv}. \tag{105.17}$$

Учтем теперь, что при выбранной нами ориентации координатных осей $y' = y$, $z' = z$. Поэтому

$$\tau^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = \tau'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = \mathrm{Inv}. \qquad (105.18)$$

В этом виде пространственно-временной инвариант (105.18) уже не зависит от ориентации систем отсчета S и S' относительно друг друга, а также от направления скорости V. Однако в формуле (105.18) предполагается, что одно из событий фиксировано. Таким событием является совмещение начал координат O и O'. Чтобы освободиться от этого ограничения, запишем (105.18) в виде

$$\Delta\tau^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = \Delta\tau'^2 - (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) = \mathrm{Inv}, \qquad (105.19)$$

где $\Delta\tau$, Δx, ..., $\Delta\tau'$, $\Delta x'$, ... означают разности между временами и пространственными координатами двух событий 1 и 2 в системах отсчета S и S':

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1, \quad \Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta z = z_2 - z_1,$$
$$\Delta\tau' = \tau_2' - \tau_1', \quad \Delta x' = x_2' - x_1', \quad \Delta y' = y_2' - y_1', \quad \Delta z' = z_2' - z_1'.$$

Квадратный корень из инварианта (105.19) называется *интервалом между рассматриваемыми событиями* и в дальнейшем обозначается через s_{12} или Δs. Очевидно, квадрат интервала между событиями 1 и 2 можно представить в виде

$$s_{12}^2 = (\tau_2 - \tau_1)^2 - l_{12}^2 = (\tau_2' - \tau_1')^2 - l_{12}'^2, \qquad (105.20)$$

где l_{12} и l_{12}' — расстояния между точками, в которых произошли события, в системах S и S' соответственно.

Можно также в формулы преобразования Лорентца ввести параметры τ и τ' вместо t и t'. Ограничиваясь частным случаем, представленным на рис. 328, перепишем формулы (105.12) в виде

$$x' = \frac{x - \beta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \tau' = \frac{\tau - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (105.21)$$

Величина β имеет смысл скорости движущейся системы координат, если за единицу принять скорость света.

Минковский (1864—1909) для описания пространственно-временных событий ввел геометрическую терминологию. Совокупность значений τ, x, y, z, характеризующую время и место события, он назвал *мировой точкой*. Многообразие мировых точек есть четырехмерное пространство, называемое *миром* или *пространством Минковского*. Линия в пространстве Минковского называется *мировой линией*. Интервал между двумя событиями принимается за *инвариантное расстояние* между соответствующими мировыми точками. На основе таких представлений было создано тензорное исчисление в пространстве Минковского, аналогичное тензорному исчислению обычной эвклидовой геометрии. Оно является адекватным математическим аппаратом специальной теории относительности.

5. Интервалы между событиями можно разделить на *вещественные* и *чисто мнимые*. Ввиду инвариантности интервала, это деление *не зависит от выбора системы отсчета*.

Поставим вопрос, можно ли выбрать такую систему отсчета, в которой события 1 и 2 были бы *одноместны*, т. е. происходили бы в одной и той же точке пространства? Если S' — такая система, то в ней $l'_{12} = 0$, и на основании (105.20) квадрат интервала может быть представлен в виде $s_{12}^2 = (\tau'_2 - \tau'_1)^2$. Отсюда видно, что $s_{12}^2 > 0$, т. е. необходимо, чтобы интервал s_{12} был вещественным. Для доказательства достаточности этого условия можно без нарушения общности ограничиться частным преобразованием Лорентца (105.21). Чтобы рассматриваемые события в системе S' пространственно совпадали, достаточно, чтобы выполнялось условие $\Delta x' = 0$, т. е. $\Delta x = \beta\, \Delta\tau$. Отсюда видно, что система S' должна двигаться со скоростью $\beta = \Delta x/\Delta\tau$. Но для вещественных интервалов $|\Delta x| < \Delta\tau$, так что $|\beta| < 1$. Значит, система S' должна двигаться со скоростью, меньшей скорости света, а потому ее можно реализовать. Промежуток времени между одноместными событиями в системе отсчета S' будет равен $\Delta\tau' = |s_{12}|$, или в обычных единицах $\Delta t' = |s_{12}|/c$. Вещественные интервалы называются *времениподобными*.

Поставим теперь вопрос о существовании системы отсчета, в которой события 1 и 2 были бы *одновременны*. Если S' — такая система, то $\tau'_2 - \tau'_1 = 0$ и, следовательно, на основании (105.20) должно быть $s_{12}^2 = -l'^2_{12}$. Значит, необходимо, чтобы интервал s_{12} был чисто мнимым. Достаточность этого условия доказывается совершенно так же, как в предыдущем случае. Расстояние между точками, в которых произошли одновременные события 1 и 2, в системе S' равно $l'_{12} = |s_{12}|$. Чисто мнимые интервалы называются *пространственноподобными*.

Рассмотрим, наконец, особый случай, когда интервал между событиями равен нулю. В этом случае, чтобы сделать события одноместными, надо перейти к системе отсчета, движущейся со скоростью света. То же требуется, чтобы события стали одновременными. И то и другое невозможно. Нулевые интервалы называются *световыми*. Такими интервалами связаны отправление светового сигнала из некоторой точки и приход его в другую точку пространства.

6. В случае частного преобразования Лорентца (105.21), соответствующего рис. 328, все изложенное можно наглядно интерпретировать графически. Это возможно потому, что достаточно ограничиться рассмотрением преобразования только одной пространственной координаты x и времени τ, т. е. рассуждать так, как если бы пространство Минковского было *двумерной плоскостью* (x, τ). Произвольное событие (мировую точку) O в этой плоскости примем

за начало прямоугольной системы координат (рис. 332). Проведем через O взаимно перпендикулярные оси, одну из которых примем за пространственную ось x, а другую — за временную ось τ в системе отсчета S. Пунктирные прямые $\tau = x$ и $\tau = -x$ будут мировыми линиями световых сигналов, распространяющихся соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси X. Пусть A — произвольное событие. Соединим точки A и O прямой мировой линией $\tau = x \operatorname{tg} \alpha$, описывающей равномерное движение какого-то тела вдоль оси X со скоростью β. Если $\beta < 1$, то с этим телом можно связать систему отсчета S', а прямую OA принять за пространственную ось X'. Ось времени τ' найдется из условия, что на ней $x' = 0$. Как видно из (105.21), это будет мировая линия $x = \beta\tau$, т. е. прямая OB, наклоненная под тем же углом $\alpha = \operatorname{arctg} \beta$, но уже к временной

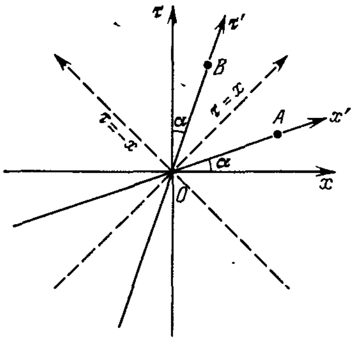

Рис. 332.

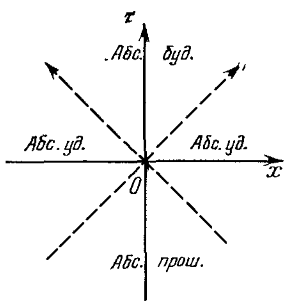

Рис. 333.

оси τ. В новой системе отсчета события O и A будут одновременными, но не одноместными. События же O и B одноместны, но не одновременны.

Вообще, все события по отношению к событию O можно разделить на *абсолютно удаленные* и *абсолютно неодновременные* (т. е. *абсолютно прошедшие* и *абсолютно будущие*), как это показано на рис. 333. Для первых интервал между событиями чисто мнимый, для вторых — вещественный. Границей между такими событиями служат пунктирные мировые линии световых сигналов, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях пространственной оси. В четырехмерном пространстве Минковского такой границей будет трехмерное многообразие, а именно конус $\tau^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$, осью которого является ось времени τ. Он называется *световым конусом*.

Причинно связанными могут быть только события, интервал между которыми времениподобный. Например, событие O (рис. 332) могло бы быть причиной события B, так как в любой системе отсчета событие B наступает позже события O. Но события не могут быть причинно связанными, когда интервал между ними пространственноподобный. Таковы, например, события O и A (рис. 332). В неподвижной системе отсчета S событие A происходит позже события O. В штрихованной системе (x', τ') оба эти события одновременны. Если же взять систему отсчета, движущуюся быстрее системы (x', τ'), но все еще медленнее света, то ее пространственная ось будет на рис. 332 наклонена круче оси X'. В такой системе отсчета событие A произойдет раньше события O. Таким образом, нельзя удовлетворить требованию, чтобы в любой системе отсчета «причина» предшествовала «следствию». Это и доказывает наше утверждение.

Прямая OA с уравнением $\tau = \beta x$ есть мировая линия некоторого движения, происходящего со скоростью $x/\tau = 1/\beta$, т. е. со *сверхсветовой скоростью*. Существование сверхсветовых скоростей не противоречит теории относительности. Последняя допускает любые скорости. Однако в случае распространения состояний со сверхсветовыми скоростями интервал между любыми двумя состояниями будет пространственноподобным, а потому каждое из этих состояний не может быть причиной другого. Такие процессы не могут служить «сигналами» для передачи информации. *Все тела и сигналы, передающие воздействие, не могут распространяться со скоростью, превышающей скорость света в вакууме. Скорость света в вакууме есть максимально возможная скорость распространения взаимодействий* [1]).

§ 106. Лорентцово сокращение длины и замедление времени

1. Если твердый стержень покоится в какой-то системе отсчета, то его длина l_0 определяется сравнением с масштабным стержнем, покоящимся в той же системе отсчета. Величину l_0 можно назвать *собственной длиной стержня*, поскольку она не зависит от выбора системы отсчета, в которой покоится стержень. Но если стержень движется, то необходимо условиться, что понимать под его длиной в покоящейся системе отсчета. Во избежание недоразумений специально подчеркнем, что все измерения расстояний и промежутков времени во всякой системе отсчета должны производиться с помощью масштабных стержней и часов, *неподвижных* в этой системе.

Длиной l движущегося стержня в покоящейся системе отсчета называется расстояние между двумя точками в этой системе, мимо которых концы стержня проходят одновременно. Для нахождения связи между l и l_0 воспользуемся частной формой преобразования Лорентца (105.12). Пусть стержень покоится в системе S' и лежит

[1]) За последние примерно 10 лет обсуждается вопрос о существовании гипотетических сверхсветовых частиц — *тахионов*. Ясно, что если бы такие частицы существовали, то они не могли бы служить «сигналами» для передачи взаимодействий. Подробнее см. *Угаров В. А.* Специальная теория относительности. «Наука», Москва, 1977.