написать

$$\Omega' = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{dv}{dy} = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{dv}{d\omega}\frac{d\omega}{dy},$$

где φ — угол падения светового луча на зеркало R. Так как $v = \omega/k$, то

$$\frac{dv}{d\omega} = \frac{1}{k} - \frac{\omega}{k^2}\frac{dk}{d\omega} = \frac{v}{\omega} - \frac{v^2}{\omega u},$$

где u — групповая скорость. Остается определить $d\omega/dy$. Если ω — частота волны, отраженной от зеркала в точке с координатой y, а $\omega + d\omega$ — с координатой $y + dy$, то в первом порядке $d\omega/\omega = -\frac{2}{c}\Omega\cos\varphi\, dy$, откуда

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{d\omega}{dy} = -2\Omega\frac{\omega}{c} = -2\Omega\frac{\omega}{nv},$$

где n — показатель преломления. Таким образом,

$$\Omega' = \left(\frac{v^2}{\omega u} - \frac{v}{u}\right)2\Omega\frac{\omega}{nv} = \frac{2\Omega}{n}\left(\frac{v}{u} - 1\right).$$

Отраженный от зеркала C волновой фронт будет также поворачиваться при распространении в веществе с угловой скоростью Ω' и притом, как легко сообразить, в том же направлении, что и падающий волновой фронт. С другой стороны, на прохождение слоя вещества толщиной $2D$ волновой фронт затрачивает время $T = 2D/v$. За это время он повернется в среде на угол $\Omega' T = \frac{4D\Omega}{nv}\left(\frac{v}{u} - 1\right)$. По выходе из сосуда P в вакуум волновой фронт преломляется, вследствие чего угол поворота увеличивается в n раз и становится равным

$$n\Omega' T = \frac{4D\Omega}{v}\left(\frac{v}{u} - 1\right) = \frac{4D\Omega}{u} - \frac{4D\Omega}{v}.$$

Этот поворот надо прибавить к повороту $4D\Omega/v$, найденному ранее без учета эффекта Допплера. Таким образом, измеряемый угол поворота α в действительности равен

$$\alpha = \frac{4D\Omega}{v} + \left(\frac{4D\Omega}{u} - \frac{4D\Omega}{v}\right) = \frac{4D\Omega}{u},$$

так что вместо формулы (108.6) получится

$$u = 4D\Omega/\alpha. \tag{108.7}$$

Следовательно, метод вращающегося зеркала Фуко дает групповую скорость.

§ 109. Замедление хода часов в гравитационном поле

1. Вопросы релятивистской теории тяготения относятся к компетенции *общей теории относительности*, излагать которую мы не предполагаем. Затронем лишь кратко вопрос о влиянии поля тяготения на течение времени. Будем исходить из *принципа эквивалентности гравитационных сил и сил инерции*. Он был подробно изложен в § 71 первого тома. Гравитационное поле будем предполагать слабым (критерий слабости поля указывается ниже).

Возьмем какую-либо инерциальную систему отсчета S, в различных точках которой установлены неподвижные часы, синхронизованные по правилу Эйнштейна. Как всегда, время, определяемое по таким синхронизованным часам, будем обозначать через t. Пусть относительно S ускоренно движутся какие-то одни часы A. Время, отмечаемое часами A в точках, через которые они проходят, условимся обозначать через t_0. Часы A предполагаются идеальными, так что ускорение их само по себе не оказывает никакого влияния на физические процессы в часах. Такие часы идут одинаково быстро с часами в сопутствующих инерциальных системах отсчета. Промежутки времени по неподвижным и движущимся часам связаны соотношением

$$dt = dt_0/\sqrt{1-(v/c)^2}, \tag{109.1}$$

где v — скорость часов A относительно системы S. В инерциальной системе отсчета S нет никакого гравитационного поля. Единственной причиной замедления времени t_0 по сравнению с t может быть только *движение часов* A относительно инерциальной системы отсчета S.

2. Однако возможна и другая точка зрения. Допустим сначала, что часы A относительно системы S движутся с постоянным ускорением $\boldsymbol{a}$. Будем отсчитывать время t от того момента, когда скорость v была равна нулю. Тогда $v=\sqrt{2ax}$, где x— расстояние, которое прошли часы A за время t. Следовательно,

$$dt = dt_0/\sqrt{1-2ax/c^2}. \tag{109.2}$$

Теперь введем ускоренную систему отсчета S_0, движущуюся вместе с часами A. В этой системе часы A неподвижны, зато есть силы инерции. Если все явления описывать, приняв S_0 за систему отсчета, то причиной замедления времени t_0 следует считать *силы инерции*. Сила инерции, отнесенная к единице массы движущегося тела, равна $-\boldsymbol{a}$. Но, согласно принципу эквивалентности, силы инерции по своим физическим действиям неотличимы от гравитационного поля, напряженность которого в рассматриваемом нами случае равна $\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{a}$. Введем еще *гравитационный потенциал* $\varphi = -gx$. Тогда предыдущая формула примет вид

$$dt = dt_0/\sqrt{1-2\varphi/c^2} \approx dt_0\left(1-\frac{\varphi}{c^2}\right), \tag{109.3}$$

или

$$\frac{dt-dt_0}{dt_0} = -\frac{\varphi}{c^2}. \tag{109.4}$$

За нуль гравитационного потенциала принят потенциал такой точки, в которой движущиеся и неподвижные часы идут одинаково быстро. Поэтому в формулах (109.3) и (109.4) интервал времени dt можно отсчитывать не по часам инерциальной системы S, а по тем часам, покоящимся в системе S_0, которые находятся в точке B с нулевым потенциалом. Можно вообще начало отсчета гравитационного потенциала поместить в любой точке, если формулу (109.4) записать в виде

$$\frac{dt_{0A}-dt_{0B}}{dt_{0A}}=\frac{\varphi_B-\varphi_A}{c^2}, \tag{109.5}$$

где интервалы времени dt_{0A} и dt_{0B} отсчитываются по двум часам, покоящимся в ускоренной системе отсчета S_0 и помещенным в точках A и B с гравитационными потенциалами φ_A и φ_B. При этом на потенциалы должно быть наложено ограничение «слабого поля»:

$$\left|\frac{\varphi_B-\varphi_A}{c^2}\right|\ll 1, \tag{109.6}$$

так как только при этом условии приближенно справедлива ньютоновская теория тяготения и имеет смысл понятие гравитационного потенциала. (На поверхности Земли $\varphi/c^2 \approx 7\cdot 10^{-10}$, на поверхности Солнца $\varphi/c^2 \approx 2{,}12\cdot 10^{-6}$, если за нуль принять потенциал в бесконечности.) Поэтому в формуле (109.5) безразлично, писать ли в знаменателе dt_{0A} или dt_{0B}.

Формула (109.5) имеет следующий смысл. Пусть в точках A и B гравитационного поля помещены тождественные часы, покоящиеся в системе отсчета S_0. Для сравнения темпа хода этих часов будем после каждого удара часов A посылать световые сигналы к часам B. Пусть N_A — число посланных сигналов. За время прихода сигналов часы в B совершат N_B ударов, причем

$$\frac{N_A-N_B}{N_A}=\frac{\varphi_B-\varphi_A}{c^2}. \tag{109.7}$$

Если $\varphi_A < \varphi_B$ (световой сигнал распространяется против направления гравитационного поля), то $N_A > N_B$, т. е. часы B идут медленнее часов A. В противоположном случае, когда $\varphi_B < \varphi_A$, медленнее будут идти часы A. Вообще, *часы в гравитационном поле идут тем медленнее, чем выше гравитационный потенциал в том месте, где они находятся.* Этот эффект, как и замедление хода движущихся часов, следует рассматривать как *свойство пространства-времени*, а не как влияние гравитационного поля на ход физических процессов в часах. Такое влияние, как уже указывалось в § 106, в случае реальных часов несомненно существует, но оно существенно зависит от того, какие физические явления положены в основу устройства часов. Для идеальных часов такого влияния нет — в этом случае эффект гравитационного замедления хода часов проявляется в чистом виде. Отмеченное обстоятельство проявляется и в формуле (109.5): гравитационное замедление времени есть *взаимное свойство двух часов*, определяющееся разностью гравитационных потенциалов между ними, тогда как для физических процессов в часах, очевидно, существен не потенциал, а напряженность гравитационного поля.

Конечно, формула (109.5) верна независимо от того, является ли гравитационное поле «фиктивным» полем сил инерции или «истинным» гравитационным полем, создаваемым массами вещества. Но эта формула была получена для однородного гравитационного поля. Применяя обычный прием, распространим ее на случай произвольного *неоднородного гравитационного поля*. Для этого вообразим, что в системе отсчета S_0 вдоль произвольной кривой AB, соединяющей часы A и B, расставлены достаточно часто тождественные часы 1, 2, 3, ..., n. Гравитационное поле между каждыми соседними часами можно считать однородным и применить к ним формулу (109.5). Перемножив почленно все эти формулы и учтя, что в пределах их точности различием знаменателей можно пренебречь, мы снова придем к результату (109.5) и тем самым докажем его справедливость и для неоднородного поля.

Так как при наличии гравитационного поля темп хода даже тождественных часов в разных точках пространства разный, то теряет смысл тот способ синхронизации часов и установления одновременности пространственно разделенных событий, который применялся в инерциальных системах отсчета, т. е. при отсутствии гравитационного поля. При наличии гравитационного поля сохраняет смысл лишь *местное время*, устанавливаемое по тождественным часам в каждой точке пространства. Следует говорить не о синхронизации пространственно разделенных часов, а только о сравнении *темпа их хода*, как это описано выше.

В свете изложенного парадокс близнецов можно рассматривать с иной точки зрения. Часы брата A все время находятся в инерциальной системе отсчета, а часы брата B испытывают вместе с ним ускорение, что эквивалентно тому, что они неподвижны, но находятся в гравитационном поле. Это поле замедляет ход часов B. При возвращении к A часы B будут показывать меньшее время, чем A.

В последнее время (1976 г.) гравитационное замедление времени было подтверждено группой американских физиков Мерилендского университета. Измерялась разность показаний атомных часов на самолете и в наземной лаборатории. Самолет курсировал на высоте 10 км с небольшой скоростью, чтобы уменьшить кинематический эффект замедления времени. Время полета было около 15 часов. Ожидаемый гравитационный эффект составлял примерно +50 нс, кинематический —7 нс. Летающие часы сравнивались с наземными до, после и во время полета. Таким образом, можно было следить за монотонным возрастанием разности показаний сравниваемых часов. Опыт подтвердил теорию с точностью до 1,6%.

3. Применим полученные результаты к излучению света. Пусть два тождественных неподвижных атома находятся в точках A и B гравитационного поля. Каждый из них в том месте, где он находится, излучает свет с одной и той же частотой ω_0. Рассматривая излучающие атомы как часы и применяя к ним формулу (109.5) или (109.7), получим

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{c^2}, \tag{109.8}$$

где ω — частота света, приходящего от A в точку наблюдения B. Если свет распространяется от низшего потенциала φ_A к высшему φ_B (т. е. против гравитационного поля), то наблюдается изменение частоты *в красную сторону*. Для света, приходящего от поверхности Солнца к Земле, это изменение частоты составляет $(\omega_0 - \omega)/\omega_0 = 2{,}12 \cdot 10^{-6}$. Напротив, если свет распространяется от высшего гравитационного потенциала к низшему (т. е. в направлении гравитационного поля), то наблюдаемая частота света *увеличивается*. Это явление, называемое *гравитационным смещением спектральных линий*, было теоретически предсказано Эйнштейном, а затем подтверждено экспериментально. Несколько иначе описанное явление было рассмотрено в § 72 т. I.

§ 110. Сложение скоростей в теории относительности

1. Задача (физического) сложения скоростей формулируется следующим образом (см. т. I, § 7). Пусть скорость движущейся частицы в системе отсчета S' равна $\boldsymbol{v}'$, причем сама система S' равномерно движется относительно «неподвижной» системы S со скоростью V в направлении оси X. Требуется определить скорость $\boldsymbol{v}$ той же частицы в системе отсчета S. Обозначим координаты частицы в системе S в момент времени t через x, y, z. Те же величины в системе S' обозначим штрихованными буквами t', x', y', z'. Так как обе эти группы переменных характеризуют *одно и то же событие* (прохождение частицы через одну и ту же пространственно-временную точку), то они связаны между собой формулами преобразования Лорентца (105.12). Поскольку $V = \text{const}$, координаты и время при движении частицы получают приращения

$$dx = \frac{dx' + V\,dt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + Vx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Разделив первые три соотношения на последнее и замечая, что $dx/dt = v_x$, $dx'/dt' = v'_x$, получим

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + v'_x V/c^2}. \tag{110.1}$$

Эти формулы и выражают *правило сложения скоростей в релятивистской кинематике*. При медленных движениях, когда можно пренебречь квадратичными величинами V^2/c^2 и $v'_x V/c^2$, они переходят в нерелятивистские формулы

$$v_x = v'_x + V, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z,$$

получающиеся из преобразования Галилея.