получим

$$\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0}=\frac{\varphi_B-\varphi_A}{c^2}, \tag{109.8}$$

где ω — частота света, приходящего от A в точку наблюдения B. Если свет распространяется от низшего потенциала φ_A к высшему φ_B (т. е. против гравитационного поля), то наблюдается изменение частоты *в красную сторону*. Для света, приходящего от поверхности Солнца к Земле, это изменение частоты составляет $(\omega_0-\omega)/\omega_0 = 2{,}12\cdot 10^{-6}$. Напротив, если свет распространяется от высшего гравитационного потенциала к низшему (т. е. в направлении гравитационного поля), то наблюдаемая частота света *увеличивается*. Это явление, называемое *гравитационным смещением спектральных линий*, было теоретически предсказано Эйнштейном, а затем подтверждено экспериментально. Несколько иначе описанное явление было рассмотрено в § 72 т. I.

§ 110. Сложение скоростей в теории относительности

1. Задача (физического) сложения скоростей формулируется следующим образом (см. т. I, § 7). Пусть скорость движущейся частицы в системе отсчета S' равна $\mathbf{v}'$, причем сама система S' равномерно движется относительно «неподвижной» системы S со скоростью V в направлении оси X. Требуется определить скорость $\mathbf{v}$ той же частицы в системе отсчета S. Обозначим координаты частицы в системе S в момент времени t через x, y, z. Те же величины в системе S' обозначим штрихованными буквами t', x', y', z'. Так как обе эти группы переменных характеризуют *одно и то же событие* (прохождение частицы через одну и ту же пространственно-временную точку), то они связаны между собой формулами преобразования Лорентца (105.12). Поскольку $V = \mathrm{const}$, координаты и время при движении частицы получают приращения

$$dx=\frac{dx'+V\,dt}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad dy=dy',\quad dz=dz',\quad dt=\frac{dt'+Vx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Разделив первые три соотношения на последнее и замечая, что $dx/dt = v_x$, $dx'/dt' = v'_x$, получим

$$v_x=\frac{v'_x+V}{1+v'_xV/c^2},\quad v_y=\frac{v'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+v'_xV/c^2},\quad v_z=\frac{v'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1+v'_xV/c^2}. \tag{110.1}$$

Эти формулы и выражают *правило сложения скоростей в релятивистской кинематике*. При медленных движениях, когда можно пренебречь квадратичными величинами V^2/c^2 и v'_xV/c^2, они переходят в нерелятивистские формулы

$$v_x=v'_x+V,\quad v_y=v'_y,\quad v_z=v'_z,$$

получающиеся из преобразования Галилея.

2. Для исследования формул (110.1) удобно принять за единицу скорость света c, введя безразмерные величины $\beta_x = v_x/c$, $\beta'_x = v'_x/c$, ... Тогда

$$\beta_x = \frac{\beta'_x + \beta}{1+\beta\beta'_x}, \quad \beta_y = \frac{\beta'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\beta'_x}, \quad \beta_z = \frac{\beta'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\beta'_x}. \qquad (110.2)$$

Все скорости по величине не могут превосходить c, а соответствующие им безразмерные величины β, β'_x, ... — единицы. Возникает, однако, вопрос, не может ли в результате (физического) сложения двух скоростей получиться скорость, превосходящая c? Ответ на этот вопрос должен быть отрицательным.

Для доказательства рассмотрим сначала случай сложения параллельных скоростей, когда направления векторов $\boldsymbol{v}'$ и $\boldsymbol{V}$ совпадают или прямо противоположны. Результирующая скорость в этом случае полностью определяется первой формулой (110.1) или эквивалентной ей первой формулой (110.2). Так как β и β'_x не превосходят единицы, то их можно представить в виде $\beta = \operatorname{th}\vartheta$, $\beta'_x = \operatorname{th}\vartheta'_x$, где аргументы гиперболических тангенсов ϑ и ϑ'_x могут принимать любые вещественные значения. Тогда первая формула (110.2) запишется в виде

$$\beta_x = \frac{\operatorname{th}\vartheta'_x + \operatorname{th}\vartheta}{1+\operatorname{th}\vartheta \operatorname{th}\vartheta'_x}.$$

Сравнивая ее с формулой сложения гиперболических тангенсов

$$\operatorname{th}(\vartheta'_x + \vartheta) = \frac{\operatorname{th}\vartheta'_x + \operatorname{th}\vartheta}{1+\operatorname{th}\vartheta \operatorname{th}\vartheta'_x},$$

видим, что результирующую безразмерную скорость также можно представить гиперболическим тангенсом $\beta_x = \operatorname{th}\vartheta_x$, причем

$$\vartheta_x = \vartheta'_x + \vartheta. \qquad (110.3)$$

Это значит, что (физическое) сложение параллельных скоростей сводится к алгебраическому сложению аргументов соответствующих им гиперболических тангенсов. Но при любых значениях аргументов гиперболический тангенс по абсолютной величине не может превосходить единицы. Следовательно, каковы бы ни были (параллельные) скорости составляющих движений, при их (физическом) сложении не может получиться скорость, превосходящая c. Если одна из складываемых скоростей равна c, то при сложении ее с любой другой скоростью получится также c. В этом и проявляется специфичность скорости света как предельной скорости, которую нельзя превзойти, сколько бы ни ускорять движение тела.

Для завершения доказательства остается исследовать случай, когда складываемые скорости взаимно перпендикулярны. Без ограничения общности можно считать, что скорость $\boldsymbol{v}'$ направлена вдоль оси Y'. Тогда, полагая в формуле (110.2) $\beta'_x = \beta'_z = 0$, получим

$$\beta_x = \beta, \quad \beta_y = \beta'_y \sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta_z = 0.$$

Квадрат (безразмерной) скорости в системе S будет

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 = \beta^2 + \beta_y'^2 (1-\beta^2).$$

Придав β постоянное, но произвольное значение, будем рассматривать величину $(v/c)^2$ как функцию аргумента $\beta_y'^2$. Производная этой величины $(1-\beta^2) \geqslant 0$, а потому функция $(v/c)^2$ возрастает с возрастанием $\beta_y'^2$. Она достигает максимума при $\beta_y'^2 = 1$, который равен 1. При всех остальных значениях β'_y отношение $(v/c)^2$ не может превосходить единицы. Это и доказывает, что при сложении перпендикулярных скоростей также не может получиться скорость, превосходящая c.

3. Когда складываемые скорости параллельны, то индекс x можно опустить и написать

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2}. \tag{110.4}$$

Если $V \ll c$, то в этой формуле можно ограничиться первыми степенями по V. В этом приближении

$$v \approx (v' + V)\left(1 - \frac{v'V}{c^2}\right) \approx v' + \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right) V. \tag{110.5}$$

Применим последнюю формулу к распространению света в жидкости, равномерно движущейся со скоростью V. Скорость света относительно неподвижной жидкости будет $v' = c/n$, где n — показатель преломления жидкости. Предполагая, что свет распространяется в направлении течения жидкости, найдем его скорость v относительно «неподвижной» системы отсчета. Для этого подставляем в формулу (110.5) $v'/c = 1/n$ и находим

$$v = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) V. \tag{110.6}$$

Формула (110.6) была получена еще Френелем в 1818 г. Он исходил из представления, что эфир увлекается движущимися телами, однако не полностью, а частично. Лоренц в электронной теории вновь пришел к формуле (110.6). Но истинный смысл ее был установлен только в теории относительности.

Формула (110.6) была экспериментально подтверждена Физо в 1851 г. Схема его опыта в усовершенствованном виде, какой ему придал Майкельсон в 1886 г., показана на рис. 336. Луч от источника S раздваивается разделительной пластинкой P. Один луч на рис. 336 изображен сплошной, а другой — пунктирной линией. Затем лучи проходят через трубки, в которых течет вода. Один луч идет в направлении, а другой против течения воды. Из-за различия скоростей лучей относительно неподвижных стенок трубки между ними при выходе из прибора возникает разность хода, изменяющаяся с изменением скорости течения V. Сначала наблюдается интерференция между лучами при неподвижной, а затем при текущей воде.

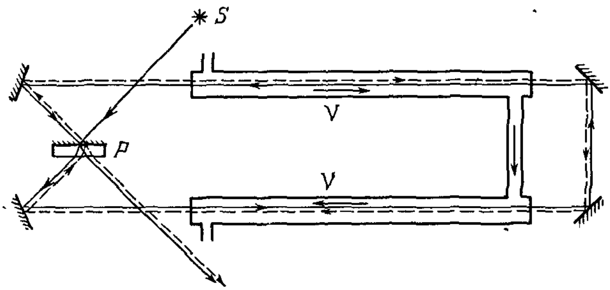

Рис. 336.

По смещению интерференционных полос можно измерить разность хода, возникающую при течении, а по ней и разность скоростей $v - c/n$.

4. Лоренц в электронной теории обобщил формулу (110.6), учтя дисперсию света. Формулу Лорентца легко получить и в теории относительности. Надо только учесть допплеровское изменение длины волны, возникающее при течении воды. Обозначим через λ длину световой волны (в вакууме) в «неподвижной» системе отсчета S, а через $\lambda + \delta\lambda$ — в системе S', относительно которой вода неподвижна. Допплеровское изменение длины волны $\delta\lambda$ в первом порядке по V определяется выражением

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{V}{v'} = \frac{Vn}{c}.$$

Следовательно,

$$v'(\lambda + \delta\lambda) = v'(\lambda) + \frac{dv'}{d\lambda}\frac{Vn}{c}\lambda,$$

или

$$v'(\lambda + \delta\lambda) = v'(\lambda) + \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{c}{n}\right)\frac{Vn\lambda}{c} = \frac{c}{n(\lambda)} - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}V.$$

В формуле (110.5) под v' надо понимать, конечно, не $v'(\lambda)$, а $v'(\lambda + \delta\lambda)$. При этом второе слагаемое в правой части (110.5) в рассматриваемом приближении следует оставить без изменения. В результате получим

$$v = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right)V. \tag{110.7}$$

Наличие добавочного члена, обусловленного дисперсией, было экспериментально подтверждено Зееманом в 1914 г.

Нелишне подчеркнуть, что допплеровское изменение длины волны относится к системе отсчета S', в которой вода неподвижна. Течение воды не сказывается на длине волны в «неподвижной» системе S, так что оба интерферирующих луча при выходе из прибора (рис. 336) имеют *одну и ту же длину волны*. Только благодаря этому и возможна интерференция.