§ 111. Релятивистская механика

1. Если какой-либо закон природы представлен в виде $A = B$, причем при переходе от одной системы отсчета к другой величины A и B остаются *неизменными*, то эти величины и самый закон называются *инвариантными* относительно этого перехода. Более общим является понятие *ковариантности*. Если при переходе от одной системы отсчета к другой величины A и B хотя и не остаются неизменными, но *преобразуются одинаково*, то закон $A = B$ сохраняется и в новой системе отсчета. В этом случае говорят, что закон $A = B$ *ковариантен* относительно рассматриваемого преобразования систем отсчета. Часто термин «инвариантность закона» употребляют в смысле его ковариантности.

До теории относительности допустимыми считались только *галилеевы преобразования координат*. Относительно этих преобразований уравнения механики Ньютона были ковариантны (инвариантны), тогда как уравнения электродинамики Максвелла—Лорентца — не ковариантны. Теория относительности показала, что от галилеева преобразования надо отказаться и заменить его *преобразованием Лорентца*. Тогда принцип относительности требует, чтобы *законы природы были ковариантны относительно преобразования Лорентца*. Этому требованию уравнения электродинамики удовлетворяют, а уравнения механики Ньютона не удовлетворяют. Поэтому механика Ньютона должна быть изменена.

В ньютоновской механике сила, действующая на тело в какой-то момент времени, определяется положением всех взаимодействующих тел *в тот же момент*. Но в теории относительности понятие «тот же момент времени» *зависит от выбора системы отсчета*. Невозможно автоматически преобразовать каждый закон сил ньютоновской механики в лорентц-ковариантную форму. Допустимы только такие теории, из которых *может быть исключено понятие действия на расстоянии*. Такая возможность существует в *теории столкновений*. Последняя исходит из идеализированного представления, что взаимодействие имеет место только в продолжение того промежутка времени, когда расстояние между телами или точечными частицами бесконечно мало по сравнению с размерами самих тел или другими характерными расстояниями, определяющими характер процессов столкновения. До и после этого бесконечно малого промежутка времени тела движутся свободно. К процессам столкновений применимы законы сохранения импульса и энергии, но им надо придать лорентц-ковариантную форму. Это и является целью настоящего параграфа. Дальнодействие можно исключить также при рассмотрении движения электрически заряженных частиц в электромагнитных полях. Однако изложение относящихся сюда вопросов электродинамики потребовало бы слишком

много места, а потому мы ограничимся только рассмотрением процессов столкновения.

2. Для решения поставленной задачи проще и логичнее всего воспользоваться понятием *четырехмерного вектора* (или, короче, *4-вектора*) в пространстве Минковского. Каждое «точечное» событие в таком пространстве характеризуется совокупностью четырех координат x, y, z, $\tau \equiv ct$. При переходе от системы отсчета S к системе отсчета S' разности координат двух точек преобразуются по формулам

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \beta\,\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta\tau' = \frac{\Delta\tau - \beta\,\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{111.1}$$

как это следует из (105.12). Напомним, что квадрат интервала между рассматриваемыми точками есть инвариант:

$$\Delta\tau^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \mathrm{Inv}. \tag{111.2}$$

Мы воспользовались частным преобразованием Лорентца (105.12), в котором предполагается, что координатные оси X, Y, Z параллельны осям X', Y', Z', а система S' движется относительно S вдоль оси X. Можно было бы взять любую ориентацию осей и любое направление движения, но это только усложнило бы запись, ничего не меняя по существу.

Назовем четырехмерным вектором совокупность четырех величин A_x, A_y, A_z, A_τ, которые при переходе от одной системы отсчета к другой преобразуются так же, как разности координат двух точек в пространстве Минковского, т. е.

$$A'_{x'} = \frac{A_x - \beta A_\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A'_{y'} = A_y, \quad A'_{z'} = A_z, \quad A'_{\tau'} = \frac{A_\tau - \beta A_x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{111.3}$$

Величины A_x, A_y, A_z называются *пространственными*, а A_τ — *временной* составляющей четырехмерного вектора. Пространственные составляющие мы объединим в обычный трехмерный вектор $\boldsymbol{A}$ и будем обозначать четырехмерный вектор через $(\boldsymbol{A}, A_\tau)$. Из тождественности законов преобразования (111.1) и (111.3) следует, что четырехмерный вектор $(\boldsymbol{A}, A_\tau)$ обладает *инвариантом*:

$$A_\tau^2 - \boldsymbol{A}^2 = \mathrm{Inv}. \tag{111.4}$$

Если какой-либо закон природы записан в четырехмерной векторной форме $(\boldsymbol{A}, A_\tau) = (\boldsymbol{B}, B_\tau)$, то он лорентц-ковариантен, так как обе части написанного равенства при преобразовании Лорентца преобразуются одинаково. Четырехмерная векторная форма эквивалентна двум уравнениям: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ и $A_\tau = B_\tau$. Этим замечанием мы и воспользуемся для решения поставленной задачи. Именно, мы постулируем, что *закон сохранения импульса и энергии можно записать в виде равенства четырехмерных векторов.* Задача состоит в том, чтобы найти вид этих векторов.

3. Рассмотрим частицу, движущуюся со скоростью $\boldsymbol{v}$ относительно неподвижной системы отсчета S. Пусть $d\boldsymbol{r}$ — ее перемещение за время $dt = d\tau/c$. Эти величины образуют четырехмерный вектор $(d\boldsymbol{r}, c\,dt)$. Очевидно, он останется четырехмерным вектором и после умножения его составляющих на одну и ту же постоянную. Возьмем в качестве таковой m_0/dt_0, где m_0 — некоторая постоянная, а $dt_0 = dt\sqrt{1-v^2/c^2}$ — собственное время, которое, как известно, является инвариантом. Тогда получим четырехмерный вектор

$$m_0\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt_0},\ c\,\frac{dt}{dt_0}\right) = m\,(\boldsymbol{v},\ c), \tag{111.5}$$

где введено обозначение

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{111.6}$$

Допустим теперь, что частица движется *медленно*, так что величиной v^2/c^2 можно пренебречь. Возьмем в качестве m_0 массу частицы, как она определяется в нерелятивистской механике. Тогда пространственная составляющая четырехмерного вектора (111.5) будет $m_0\boldsymbol{v}$. Вектор $m_0\boldsymbol{v}$ в ньютоновской механике называется *импульсом*. Поэтому в релятивистской механике естественно определить импульс выражением

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v} = \frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{111.7}$$

поскольку в пределе при малых скоростях оно переходит в нерелятивистское выражение $m_0\boldsymbol{v}$. Величина m_0 называется *массой покоя*, а m — *массой движения* или *релятивистской массой*. Таким образом, $(\boldsymbol{P},\ mc)$ есть четырехмерный вектор, а величина $(mc)^2 - P^2$ — его инвариант. Значение этого инварианта легко найти: при $v = 0$ он обращается в $(m_0c)^2$, а потому

$$(mc)^2 - P^2 = (m_0c)^2. \tag{111.8}$$

Остается выяснить физический смысл временной части четырехмерного вектора (111.5). Для этого замечаем, что $d\boldsymbol{P}/dt$ есть сила, действующая на частицу. Работа этой силы на перемещении $\boldsymbol{v}\,dt$ равна $dA = \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\,d\boldsymbol{P}/m$ или на основании (111.8) $dA = c^2\,dm$. Энергия частицы найдется интегрированием этого выражения по m. Если постоянную интегрирования положить равной нулю, то получится формула

$$\mathscr{E} = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{111.9}$$

Величина $\mathscr{E}$ называется *полной энергией частицы*. Для покоящейся частицы $m = m_0$, так что (111.9) переходит в

$$\mathscr{E}_0 = m_0c^2. \tag{111.10}$$

Величина $\mathscr{E}_0$ называется *энергией покоя частицы*.

Формула (111.9), впервые в общем виде полученная Эйнштейном, устанавливает *взаимосвязь между массой и энергией*. Кинетическая энергия частицы определяется выражением

$$K = \mathscr{E} - \mathscr{E}_0 = (m - m_0)\, c^2. \qquad (111.11)$$

При медленных движениях это выражение переходит в обычную формулу $K = {}^1/_2 m_0 v^2$.

Импульс и энергия теперь объединены в четырехмерный вектор

$$(\boldsymbol{P},\ mc) = (\boldsymbol{P},\ \mathscr{E}/c), \qquad (111.12)$$

называемый *вектором импульса — энергии*. Его инвариантом относительно преобразования Лорентца является

$$\left(\frac{\mathscr{E}}{c}\right)^2 - P^2 = (m_0 c)^2 = \mathrm{Inv}. \qquad (111.13)$$

Тем самым в теории относительности законы сохранения импульса и энергии перестают быть независимыми законами, а объединяются в *единый закон сохранения четырехмерного вектора импульса — энергии*. Его называют также *законом сохранения импульса — энергии*.

Остается ответить на два вопроса. Во-первых, почему при вычислении работы сила была определена так же, как в нерелятивистской механике, т. е. как производная $d\boldsymbol{P}/dt$? Во-вторых, почему энергия всегда определяется с точностью до несущественной произвольной постоянной, здесь же она определена *однозначно*? Ответ на оба вопроса, в сущности, один и тот же. Он состоит в том, что на величину $\mathscr{E}$, вычисленную выше и названную полной энергией, было наложено требование, чтобы она (после деления на c) была *временной компонентой четырехмерного вектора* (111.5). Если энергию не определить однозначно, то она этому требованию удовлетворять не будет.

Для системы невзаимодействующих частиц, а также частиц, взаимодействующих только при столкновениях, четырехмерный вектор импульса — энергии определяется как сумма четырехмерных векторов импульса — энергии этих частиц. При этом в теории относительности достигается однообразная трактовка упругих и неупругих столкновений. Независимо от характера столкновения сохраняется трехмерный вектор импульса системы. Следовательно, должна сохраняться и энергия, как (умноженная на c) временная компонента четырехмерного вектора. Вместе с энергией сохраняется и релятивистская масса. Только при упругих и неупругих столкновениях она по-разному распределяется между массой покоя и массой, связанной с кинетической энергией макроскопического движения. Например, при столкновении двух одинаковых неупругих шаров, движущихся с одинаковыми скоростями навстречу друг другу, исчезновение кинетической энергии макроскопического движения

(т. е. переход его во внутреннее молекулярное движение) проявляется в эквивалентном увеличении массы покоя системы: масса нагретого шара больше, чем масса такого же холодного шара. При упругих же столкновениях остаются неизменными и масса покоя, и масса, связанная с кинетической энергией макроскопического движения.

Существуют частицы (*фотоны*, *нейтрино*), для которых масса покоя равна нулю. Для них связь (111.13) между энергией и импульсом имеет вид

$$P = \mathscr{E}/c. \tag{111.14}$$

Такие частицы всегда движутся со скоростью c. Иначе, как видно из формул (111.7) и (111.9), импульс и энергия таких частиц обращались бы в нуль.

ЗАДАЧИ

1. Две одинаковые частицы движутся в лабораторной системе навстречу друг другу с одной и той же скоростью v. Найти относительную скорость V каждой из них относительно другой. Какой энергией $\mathscr{E}'$ в лабораторной системе отсчета должна обладать одна из частиц, чтобы получить ту же относительную скорость, если вторая частица (мишень) неподвижна? (Принцип действия *ускорителя на встречных пучках*.)

Решение. По теореме сложения скоростей

$$V = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}.$$

Искомая полная энергия, которую надо было бы сообщить одной частице, равна

$$\mathscr{E}' = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

где $\mathscr{E}_0$ — энергия покоя частицы. Фактическая энергия, которой обладает частица, $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Отсюда нетрудно получить

$$\mathscr{E}' = 2\frac{\mathscr{E}^2}{\mathscr{E}_0} - \mathscr{E}_0, \tag{111.15}$$

а для кинетической энергии

$$K' = 2\left(\frac{\mathscr{E}^2}{\mathscr{E}_0} - \mathscr{E}_0\right). \tag{111.16}$$

(Другое решение см. в т. I, § 28.)

2. Вывести формулу, являющуюся релятивистским обобщением формулы Циолковского (см. т. I, § 21) для движения ракеты. Считать, что скорости ракеты и газовой струи направлены вдоль одной прямой.

Решение. На основании законов сохранения импульса и энергии

$$mv + m_{\text{газ}}v_{\text{газ}} = \text{const}, \quad m + m_{\text{газ}} = \text{const},$$

где m и $m_{\text{газ}}$ — релятивистские массы ракеты и газов, а v и $v_{\text{газ}}$ — их скорости в произвольный момент времени. Газы, уже покинувшие ракету, не влияют на ее движение. Поэтому можно считать, что в рассматриваемый момент времени $m_{\text{газ}} = 0$. Тогда не возникает неопределенности, что следует понимать под $v_{\text{газ}}$. Однако, поскольку газы непрерывно образуются, $dm_{\text{газ}} \neq 0$. Дифференцируя

предыдущие уравнения, получим

$$m\,dv+(v-v_{\text{газ}})\,dm=0.$$

По релятивистскому закону сложения скоростей

$$v_{\text{газ}}=\frac{v-u}{1-vu/c^2},$$

где u — скорость газовой струи относительно ракеты. Исключение $v_{\text{газ}}$ приводит к уравнению

$$dv+u\,\frac{1-v^2/c^2}{1-vu/c^2}\,\frac{dm}{m}=0.$$

Воспользовавшись формулой (111.6), после несложных преобразований найдем

$$\frac{dv}{v^2-c^2}=\frac{u}{c^2}\,\frac{dm_0}{m_0}.$$

Предполагая скорость u газовой струи постоянной и интегрируя, получим искомый результат:

$$\frac{(m_0)_{\text{нач}}}{m_0}=\left(\frac{1+v/c}{1-v/c}\right)^{c/2u}. \qquad (111.17)$$