что *энергия равновесного излучения, локализованная в кубике с ребром, равным длине волны λ, одинакова во всех изотропных недиспергирующих средах и определяется только температурой среды.* Это утверждение относится также не только к полной плотности энергии, но и к ее монохроматическим составляющим.

§ 115. Закон Стефана — Больцмана

1. В XIX веке производились многочисленные исследования зависимости *интегральной лучеиспускательной способности* нагретых тел от температуры, т. е. величины, которая определяет *суммарную энергию* всех длин волн, излучаемых телами. Эти исследования приводили к противоречивым результатам. Основная причина расхождений была окончательно выяснена после установления закона Кирхгофа, так как излучение определяется не только температурой, но также составом тела и физическими свойствами излучающей поверхности. А на эту сторону дела в экспериментальных исследованиях не обращалось должного внимания. Из эмпирически установленных законов следует отметить только результат, найденный в 1879 г. Стефаном (1835—1898). Он нашел, что *для черных тел излучательная способность пропорциональна четвертой степени температуры.* Через пять лет Больцман получил этот результат теоретически из термодинамических соображений и показал, что он *абсолютно верен для абсолютно черных тел.* Этот результат, получивший название *закона Стефана — Больцмана,* был подтвержден последующими опытами по излучению абсолютно черного тела.

Вывод Больцмана и все последующие работы по теории теплового излучения существенно используют результаты Максвелла, предсказавшего и рассчитавшего *давление света* (см. т. II, § 61; т. III, § 145, а также задачу 2 к § 84 этого тома). Для изотропного излучения это давление равно $\mathscr{P} = {}^1/_3 u$, где u — интегральная плотность лучистой энергии. К такому выражению должна приводить всякая *релятивистская теория света,* независимо от того, является ли она корпускулярной или волновой. До теории относительности этот результат, разумеется, не был известен, а результаты Максвелла не считались общепризнанными. В частности, согласно нерелятивистской корпускулярной теории должно было бы быть $\mathscr{P} = {}^2/_3 u$, как это предсказывает кинетическая теория газов (см. т. II, § 59). Поэтому опыты П. Н. Лебедева, впервые измерившего в 1900 г. световое давление, подтвердившие результаты Максвелла, имели основополагающее значение для всей термодинамики лучистой энергии.

2. Доказательство закона Стефана — Больцмана мы проведем *методом циклов,* так как таким путем попутно будут получены важные соотношения, используемые в дальнейшем. Допустим, что изотропное излучение произвольного спектрального состава зак-

лючено в адиабатическую оболочку с абсолютно зеркальными стенками. Произведем над ним адиабатический квазистатический процесс, при котором объем V, ограниченный оболочкой, меняется бесконечно медленно. Чтобы быть уверенным, что во время этого процесса излучение все время остается изотропным, можно взять оболочку сферической формы (в следующем параграфе будет показано, что эта предосторожность является лишней). Внутренняя энергия излучения в оболочке равна uV. При увеличении объема оболочки на dV за счет этой энергии совершается работа $\mathscr{P}\,dV$, так что $\mathscr{P}\,dV = -d\,(uV)$. А так как для изотропного излучения $\mathscr{P} = {}^1/_3 u$, то этому уравнению можно придать вид ${}^4/_3 u\,dV + V\,du = 0$. Отсюда следует, что во время процесса

$$uV^{4/3} = \text{const}, \tag{115.1}$$

или

$$\mathscr{P}V^{4/3} = \text{const}. \tag{115.2}$$

Это — *уравнение адиабаты* для изотропного излучения, совершенно аналогичное уравнению адиабаты Пуассона для идеального газа. Постоянная адиабаты равна $\gamma = {}^4/_3$.

В силу эффекта Допплера при адиабатическом сжатии или расширении излучения должен меняться его спектральный состав. Допустим, например, что изотропное излучение занимает спектральный интервал ω, $\omega + d\omega$. В результате отражения от движущейся стенки частота ω и ширина интервала $d\omega$ изменятся и сделаются равными ω' и $d\omega'$. При этом будет выполняться соотношение

$$u_\omega\,d\omega \cdot V^{4/3} = u'_{\omega'}\,d\omega' \cdot V'^{4/3} = \text{const}, \tag{115.3}$$

где V' и $u'_{\omega'}$ — объем и спектральная плотность энергии излучения частоты ω' в конце процесса.

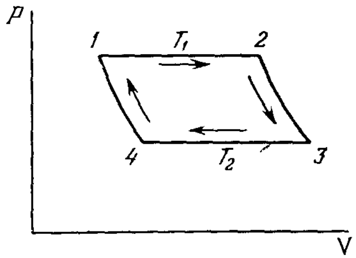

Рис. 341.

3. Докажем теперь закон Стефана — Больцмана. Для этого произведем над черным излучением *цикл Карно*. Допустим, что излучение заключено в цилиндре, боковые стенки и поршень которого идеально отражающие, а дно черное и может приводиться в тепловой контакт с нагревателем температуры T_1 и холодильником температуры T_2. Излучение можно адиабатически изолировать с помощью идеально отражающей задвижки, вводимой сбоку для прикрытия черного дна цилиндра. В отсутствие задвижки, когда черное дно цилиндра приведено в тепловой контакт с нагревателем или холодильником, излучение в цилиндре, конечно, будет равновесным. Чтобы быть уверенным, что оно сохранится равновесным и во время адиабатического процесса, когда задвижка встав-

лена, введем внутрь цилиндра черную пылинку, роль которой была выяснена в пункте 1 § 112. На изотерме *1—2* (рис. 341) дно цилиндра контактирует с нагревателем. Количество тепла, переданное нагревателем на этой изотерме, равно

$$Q_1 = u_1(V_2 - V_1) + \mathscr{P}_1(V_2 - V_1) = \frac{4}{3} u_1 (V_2 - V_1).$$

Количество тепла, отданное холодильнику на изотерме *3—4*, $Q_2 = {}^4/_3 u_2(V_3 - V_4)$. По теореме Карно

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{u_1(V_2 - V_1)}{u_2(V_3 - V_4)} = \frac{T_1}{T_2}.$$

На адиабатах *2—3* и *4—1* в силу (115.1) выполняются соотношения

$$u_1^{3/4} V_2 = u_2^{3/4} V_3, \quad u_1^{3/4} V_1 = u_2^{3/4} V_4.$$

Отсюда

$$\frac{V_2 - V_1}{V_3 - V_4} = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{3/4},$$

а потому $u_1/T_1^4 = u_2/T_2^4 = \mathrm{const}$. Следовательно,

$$u = aT^4, \tag{115.4}$$

где a — универсальная постоянная. Но это есть иная форма закона Стефана — Больцмана.

Результат (115.4) можно получить короче, если к равновесному излучению применить общую термодинамическую формулу

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial T}\right)_V - \mathscr{P}. \tag{115.5}$$

Подставив сюда $U = Vu(T)$, $\mathscr{P} = {}^1/_3 u(T)$, придем к тому же дифференциальному уравнению, интегрированием которого была получена формула (115.4). Однако мы не хотели пользоваться формулой (115.5).

§ 116. Теорема и закон смещения Вина

1. Важные результаты в термодинамике излучения были получены Вильгельмом Вином (1864—1928) в 1893—1894 гг. Вин доказал, что *равновесное излучение, заключенное в оболочке с идеально отражающими стенками, будет оставаться равновесным при квазистатическом сжатии или расширении оболочки.*

Для наших целей при доказательстве теоремы Вина достаточно ограничиться оболочкой сферической формы. В этом случае, ввиду сферической симметрии системы, отпадает необходимость специально доказывать, что в ходе процесса изотропия излучения все время сохраняется. Сожмем излучение квазистатически от начального объема V_1 до конечного V_2. При этом будет совершена работа про-