лена, введем внутрь цилиндра черную пылинку, роль которой была выяснена в пункте 1 § 112. На изотерме *1—2* (рис. 341) дно цилиндра контактирует с нагревателем. Количество тепла, переданное нагревателем на этой изотерме, равно

$$Q_1 = u_1 (V_2 - V_1) + \mathscr{P}_1 (V_2 - V_1) = \frac{4}{3} u_1 (V_2 - V_1).$$

Количество тепла, отданное холодильнику на изотерме *3—4*, $Q_2 = {}^4/_3 u_2 (V_3 - V_4)$. По теореме Карно

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{u_1 (V_2 - V_1)}{u_2 (V_3 - V_4)} = \frac{T_1}{T_2}.$$

На адиабатах *2—3* и *4—1* в силу (115.1) выполняются соотношения

$$u_1^{3/4} V_2 = u_2^{3/4} V_3, \quad u_1^{3/4} V_1 = u_2^{3/4} V_4.$$

Отсюда

$$\frac{V_2 - V_1}{V_3 - V_4} = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{3/4},$$

а потому $u_1/T_1^4 = u_2/T_2^4 = \text{const}$. Следовательно,

$$u = aT^4, \tag{115.4}$$

где a — универсальная постоянная. Но это есть иная форма закона Стефана — Больцмана.

Результат (115.4) можно получить короче, если к равновесному излучению применить общую термодинамическую формулу

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial T}\right)_V - \mathscr{P}. \tag{115.5}$$

Подставив сюда $U = Vu(T)$, $\mathscr{P} = {}^1/_3 u(T)$, придем к тому же дифференциальному уравнению, интегрированием которого была получена формула (115.4). Однако мы не хотели пользоваться формулой (115.5).

§ 116. Теорема и закон смещения Вина

1. Важные результаты в термодинамике излучения были получены Вильгельмом Вином (1864—1928) в 1893—1894 гг. Вин доказал, что *равновесное излучение, заключенное в оболочке с идеально отражающими стенками, будет оставаться равновесным при квазистатическом сжатии или расширении оболочки.*

Для наших целей при доказательстве теоремы Вина достаточно ограничиться оболочкой сферической формы. В этом случае, ввиду сферической симметрии системы, отпадает необходимость специально доказывать, что в ходе процесса изотропия излучения все время сохраняется. Сожмем излучение квазистатически от начального объема V_1 до конечного V_2. При этом будет совершена работа против сил светового давления, и энергия излучения в оболочке увеличится. Спектральный состав излучения также изменится, из-за эффекта Допплера. Допустим, что в результате этого излучение перестанет быть равновесным. Введем внутрь оболочки в конечном состоянии бесконечно малую черную пылинку, поглощающую и излучающую свет. По истечении достаточно длительного времени она превратит неравновесное излучение в оболочке в равновесное. Это — необратимый процесс, идущий самопроизвольно. Обратный процесс превращения равновесного излучения в неравновесное, разумеется, сам собою идти не может.

Когда излучение внутри оболочки станет равновесным, не убирая пылинку, начнем бесконечно медленно адиабатически расширять оболочку, доведя объем излучения до исходного значения V_1. После этого удалим пылинку. Энергия пылинки бесконечно мала, а потому ее наличие может сказаться на общей энергии излучения в полости также бесконечно мало. С другой стороны, давление изотропного излучения зависит только от интегральной плотности энергии излучения u, но не от его спектрального состава. Поэтому работа, которую совершит световое давление при расширении оболочки, будет с точностью до бесконечно малой величины равна внешней работе, совершенной над излучением при его сжатии. Отсюда следует, что в результате сжатия и последующего расширения энергия, а с ней и температура излучения не изменятся.

Система совершила круговой процесс, в ходе которого она не получала и не отдавала тепло, а общая работа, произведенная ею, равна нулю. Значит, в окружающих телах не произошло никаких изменений, а потому рассматриваемый круговой процесс обратим. Но это невозможно, так как одна из стадий этого кругового процесса по нашему предположению необратима. Следовательно, это предположение неверно, и теорема Вина доказана.

2. Значение теоремы Вина — методическое. Действительно, адиабатически и квазистатически меняя объем равновесного излучения в оболочке с идеально зеркальными стенками, можно получить равновесное излучение произвольной плотности, а следовательно, и температуры. Энергию (и температуру) этого излучения можно найти, вычислив работу, совершенную над ним в этом процессе. Его спектральный состав найдется, если вычислить допплеровское изменение частоты излучения при его отражении от движущейся оболочки. Тем самым будет установлено определенное соответствие между параметрами равновесного излучения в начале процесса и на любой стадии его.

Применим этот метод к равновесному излучению в сферической оболочке с идеально зеркальными стенками. При бесконечно медленном адиабатическом расширении или сжатии оболочки излучение в ней все время будет оставаться равновесным, так что его можно в любой момент времени характеризовать определенной температурой T. Выделим внутри оболочки произвольный луч, падающий на оболочку под углом ϑ (рис. 342). Время между двумя последовательными отражениями этого луча равно $\Delta t = (2r/c)\cos\vartheta$. За это время радиус оболочки r получает приращение $\Delta r = \dot{r}\,\Delta t$. При каждом отражении происходит допплеровское изменение частоты, определяемое формулой

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{2\dot{r}\cos\vartheta}{c} = -\frac{2\Delta r\cos\vartheta}{c\,\Delta t} = -\frac{\Delta r}{r},$$

если пренебречь квадратом бесконечно малой радиальной скорости $\dot{r}$ расширения оболочки. Относительное изменение частоты $\Delta\omega/\omega$ определяется только относительным изменением $\Delta r/r$ радиуса оболочки. Такая же формула получится и в том случае, когда за время изменения радиуса оболочки на Δr произойдет не одно, а много отражений светового луча. Требуется только, чтобы выполнялось условие $\Delta r \ll r$. При бесконечно медленном расширении величины Δr и $\Delta\omega$ можно заменить их дифференциалами, т. е. написать

$$\frac{d\omega}{\omega} + \frac{dr}{r} = 0. \qquad (116.1)$$

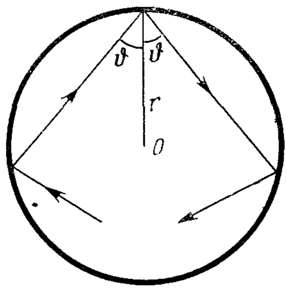

Рис. 342.

Это означает, что реальный процесс, в котором последовательные отражения отделены друг от друга малыми, но все же конечными промежутками времени, при расчетах заменяется идеализированной схемой, в которой эти отражения следуют друг за другом *непрерывно во времени*. Интегрируя уравнение (116.1), получим

$$\omega r = \text{const}. \qquad (116.2)$$

Так как $r \sim V^{1/3}$, то этот результат можно записать также в виде

$$\omega^3 V = \text{const}. \qquad (116.3)$$

В таком виде он справедлив для полости произвольной формы. А поскольку он получен для бесконечно медленного процесса, величина $\omega^3 V$ является *адиабатическим инвариантом*. Комбинируя его с ранее полученными адиабатическими инвариантами (115.1) и (115.3), получим новые адиабатические инварианты. Так, из формул (115.1) и (116.3) следует

$$\frac{\omega^4}{u} = \text{const}, \qquad (116.4)$$

или на основании закона Стефана — Больцмана

$$\frac{\omega}{T} = \text{const}. \qquad (116.5)$$

Аналогично, формулы (115.3) и (116.3) дают

$$\frac{u_\omega\,d\omega}{\omega^4}=\text{const}. \tag{116.6}$$

Таким образом, при квазистатическом расширении или сжатии равновесного излучения в полости с зеркальными стенками каждая квазимонохроматическая составляющая излучения ведет себя *независимо от остальных составляющих* и меняется так, что величины $\omega^3 V$, u/ω^4 и $u_\omega\,d\omega/\omega^4$ остаются постоянными, т. е. являются адиабатическими инвариантами. По теореме Вина при таком процессе излучение все время остается равновесным. Такое же излучение можно было бы получить в неподвижной оболочке, нагревая или охлаждая ее стенки. Поэтому полученные результаты можно представить как *свойства только самого равновесного излучения*, не связывая их ни с каким конкретным процессом. Сформулируем их следующим образом. *Изменим любым способом температуру равновесного излучения от T до T', чтобы излучение оставалось равновесным. Каждой частоте ω излучения в начальном состоянии приведем в соответствие такую частоту ω' в конечном состоянии, чтобы $\omega/T = \omega'/T'$ и, следовательно, $d\omega/T = d\omega'/T'$. Тогда плотности лучистой энергии в этих состояниях будут связаны соотношениями*

$$\frac{u}{\omega^4}=\frac{u'}{\omega'^4}, \tag{116.7}$$

$$\frac{u_\omega\,d\omega}{\omega^4}=\frac{u'_{\omega'}\,d\omega'}{\omega'^4}. \tag{116.8}$$

Эти результаты составляют содержание так называемого *закона смещения Вина в его наиболее общей форме.*

3. Из формулы (116.8) получаем

$$u_\omega(\omega,\ T)=\frac{\omega^4}{\omega'^4}\frac{d\omega'}{d\omega}u'_{\omega'}(\omega',\ T')=\frac{T^3}{T'^3}u'_{\omega'}\left(\frac{T'}{T}\omega,\ T'\right).$$

Это соотношение справедливо при любом значении температуры T', а потому величина справа от T' не зависит. Величине T' можно придать *любое значение*, представив полученное соотношение в виде

$$u_\omega(\omega,\ T)=T^3\varphi\left(\frac{\omega}{T}\right), \tag{116.9}$$

где $\varphi(\omega/T)$ — *универсальная функция* аргумента ω/T. Ввиду соотношения $\omega/T=\omega'/T'$, тот же результат можно записать в виде

$$u_\omega(\omega,\ T)=\omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right), \tag{116.10}$$

где $f(\omega/T)\equiv(T'/\omega')^3\,\varphi(\omega/T)$ — новая *универсальная функция* того же аргумента ω/T. Тем самым определение универсальной функции $u_\omega(\omega,\ T)$ *двух аргументов* сведено к задаче нахождения универсальной функции $\varphi(\omega/T)$ или $f(\omega/T)$ только *одного аргумента* ω/T. Отсюда следует, что *если известно спектральное распределение в равновесном излучении при какой-либо произвольной температуре* T', *то с помощью формулы* (116.9) *или* (116.10) *можно найти это распределение при всякой другой температуре* T.

В переменных λ, T, как это следует из соотношения (112.2), формулам (116.9) и (116.10) можно придать вид

$$u_\lambda = T^5 \varphi_1(\lambda T), \tag{116.11}$$

$$u_\lambda = \frac{1}{\lambda^5} f_1(\lambda T), \tag{116.12}$$

где $\varphi_1(\lambda T)$ и $f_1(\lambda T)$ — новые *универсальные функции*. При фиксированной температуре T величина u_λ становится функцией только длины волны λ. Эта функция не может возрастать монотонно, а должна иметь максимум. В противном случае интегральная плотность излучения

$$u = \int_0^\infty (u_\lambda)_{T=\text{const}}\, d\lambda \tag{116.13}$$

не могла бы оставаться конечной. Длину волны в максимуме обозначим через λ_m. Если ввести обозначение $x = \lambda T$, то для определения положения максимума получится уравнение

$$d\varphi_1/d\lambda = T\, d\varphi_1/dx = 0, \quad \text{т. е.} \quad d\varphi_1/dx = 0.$$

Таким образом, при всех температурах максимум получается при одном и том же значении аргумента x. Отсюда следует, что *при повышении температуры максимум функции* $u_{\lambda,\,T=\text{const}}$ *смещается в сторону более коротких волн и притом так, что выполняется соотношение*

$$\lambda_m T = b = \text{const}. \tag{116.14}$$

Измерения дают: $b = 0{,}2898$ см·К. Этот результат, определяющий смещение максимума излучения при изменении температуры T, называют *законом Вина в его специальной форме*. В точках максимума функции $u_\lambda(T)$ и $u_{\lambda'}(T')$ относятся как *пятые степени* абсолютных температур T и T'.

Функция $u_\omega(\omega, T)$ при постоянной температуре T также обращается в максимум при какой-то частоте $\omega = \omega_m$. Частота ω_m не равна $2\pi c/\lambda_m$, так как речь идет о максимумах *различных функций* $u_\omega(\omega)$ и $u_\lambda(\lambda)$. При изменении температуры излучения положение максимума смещается, но при этом имеет место соотношение

$$\frac{\omega_m}{T} = \text{const}, \tag{116.15}$$

которое является *другой формой закона смещения Вина* (116.14).

4. Выведенный ранее закон Стефана — Больцмана является следствием общей формулы (116.9). Действительно, вводя обозначение $x = \omega/T$, из этой формулы при постоянной T находим

$$u = \int_0^\infty u_\omega \, d\omega = T^3 \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\omega}{T}\right) d\omega = T^4 \int_0^\infty \varphi(x)\, dx = aT^4,$$

где $a \equiv \int_0^\infty \varphi(x)\, dx$ — универсальная постоянная.

§ 117. Формула Рэлея — Джинса

1. Результатами, изложенными в предыдущих параграфах, исчерпывается все, что могла дать феноменологическая термодинамика в проблеме теплового излучения. Ее оказалось недостаточно для решения основной проблемы теории теплового излучения: определения функции $u_\omega(\omega, T)$ или функции $I_\omega(\omega, T)$, связанной с ней соотношением (112.6). Для этого оказалось необходимым привлечь *статистические методы* и учесть *квантовые свойства вещества и излучения*. Первая попытка теоретического решения указанной проблемы была предпринята в 1887 г. В. А. Михельсоном (1860—1927). В то время, как показало последующее развитие физики, правильное решение рассматриваемой проблемы было, конечно, невозможно. Заслуга Михельсона состоит в том, что он привлек внимание физиков к одной из важнейших проблем, решение которой положило начало *квантовой физики*.

Общий метод теоретического определения функции $u_\omega(\omega, T)$ в рамках классической физики, не связанный с модельными представлениями, был указан в 1900 г. Рэлеем и через пять лет более подробно развит Джинсом (1877—1946). Рэлей и Джинс применили к равновесному излучению в полости теорему классической статистической механики о *равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы*. Согласно этой теореме, *в состоянии статистического равновесия на каждую степень свободы приходится в среднем кинетическая энергия* $^1/_2kT$, где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К — постоянная Больцмана.

Если степень свободы колебательная, то надо учесть еще *потенциальную энергию*. В случае *гармонических колебаний* среднее значение потенциальной энергии равно также $^1/_2kT$ (см. т. II, § 63). Таким образом, *в состоянии статистического равновесия на каждую колебательную степень свободы приходится средняя энергия, равная* kT.

Эта теорема сводит задачу нахождения функции $u_\omega(\omega, T)$ к определению *числа степеней свободы излучения в полости*. Поскольку равновесное излучение в полости не зависит от ее формы и