4. Выведенный ранее закон Стефана — Больцмана является следствием общей формулы (116.9). Действительно, вводя обозначение $x = \omega/T$, из этой формулы при постоянной T находим

$$u = \int_0^\infty u_\omega \, d\omega = T^3 \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\omega}{T}\right) d\omega = T^4 \int_0^\infty \varphi(x)\, dx = aT^4,$$

где $a \equiv \int_0^\infty \varphi(x)\, dx$ — универсальная постоянная.

§ 117. Формула Рэлея — Джинса

1. Результатами, изложенными в предыдущих параграфах, исчерпывается все, что могла дать феноменологическая термодинамика в проблеме теплового излучения. Ее оказалось недостаточно для решения основной проблемы теории теплового излучения: определения функции $u_\omega(\omega, T)$ или функции $I_\omega(\omega, T)$, связанной с ней соотношением (112.6). Для этого оказалось необходимым привлечь *статистические методы* и учесть *квантовые свойства вещества и излучения*. Первая попытка теоретического решения указанной проблемы была предпринята в 1887 г. В. А. Михельсоном (1860—1927). В то время, как показало последующее развитие физики, правильное решение рассматриваемой проблемы было, конечно, невозможно. Заслуга Михельсона состоит в том, что он привлек внимание физиков к одной из важнейших проблем, решение которой положило начало *квантовой физики*.

Общий метод теоретического определения функции $u_\omega(\omega, T)$ в рамках классической физики, не связанный с модельными представлениями, был указан в 1900 г. Рэлеем и через пять лет более подробно развит Джинсом (1877—1946). Рэлей и Джинс применили к равновесному излучению в полости теорему классической статистической механики о *равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы*. Согласно этой теореме, *в состоянии статистического равновесия на каждую степень свободы приходится в среднем кинетическая энергия* $^1/_2 kT$, где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К — постоянная Больцмана.

Если степень свободы колебательная, то надо учесть еще *потенциальную энергию*. В случае *гармонических колебаний* среднее значение потенциальной энергии равно также $^1/_2 kT$ (см. т. II, § 63). Таким образом, *в состоянии статистического равновесия на каждую колебательную степень свободы приходится средняя энергия, равная* kT.

Эта теорема сводит задачу нахождения функции $u_\omega(\omega, T)$ к определению *числа степеней свободы излучения в полости*. Поскольку равновесное излучение в полости не зависит от ее формы и материала стенок, можно предположить, что полость имеет форму куба с идеально отражающими стенками. А чтобы излучение в полости было равновесным, можно ввести в нее бесконечно малую черную пылинку, как это делалось в предыдущем параграфе при доказательстве теоремы Вина.

2. Чтобы лучше уяснить метод определения числа степеней свободы, рассмотрим этот вопрос сначала не для векторного электромагнитного поля, а для *скалярного волнового поля*, например для продольных акустических волн. В такой постановке этот вопрос имеет и самостоятельный интерес, например в теории теплоемкости твердых тел Дебая. Волновое поле будем характеризовать какой-то функцией $V(\boldsymbol{r}, t)$, удовлетворяющей волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0. \qquad (117.1)$$

Предположим, что на стенках полости функция V обращается в нуль. Тогда (а также и при других граничных условиях) по теореме Фурье функция $V(\boldsymbol{r}, t)$ может быть представлена суперпозицией стоячих волн. Координатные оси X, Y, Z направим параллельно ребрам кубической полости. Так как граничные условия должны удовлетворяться на гранях $x=0$, $y=0$, $z=0$ и на параллельных им гранях полости, то каждая стоячая волна должна представляться функцией с *разделяющимися переменными*, т. е.

$$V=X(x)\,Y(y)\,Z(z)\exp(i\omega t).$$

Отсюда

$$\frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}, \;\ldots,\; \frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=\frac{\omega^2}{c^2}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (117.1), получим

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\frac{\omega^2}{c^2}.$$

Левая часть этого уравнения есть сумма функций от x, y, z соответственно, т. е. от различных переменных. Она равна постоянной ω^2/c^2. Это может быть тогда и только тогда, когда каждая из этих функций сама постоянна, т. е.

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=q_x^2, \quad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=q_y^2, \quad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=q_z^2,$$

где q_x, q_y, q_z — постоянные, удовлетворяющие условию

$$q_x^2+q_y^2+q_z^2=q^2\equiv\frac{\omega^2}{c^2}. \qquad (117.2)$$

Решение первого уравнения запишем в виде $X=\sin(q_x x+\delta_x)$, где δ_x — постоянная интегрирования. Второй постоянной интегрирования служит амплитуда, которую без потери общности можно опустить. На грани полости $x = 0$ функция X должна обращаться в нуль, т. е. $\sin \delta_x = 0$. Также не теряя общности, можно положить $\delta_x = 0$. На противоположной грани $x = l$, где l — длина ребра кубической полости, функция X также должна обращаться в нуль, а потому $\sin k_x l = 0$. Такие же результаты получаются и для координат y и z. Следовательно,

$$V = \sin q_x x \sin q_y y \sin q_z z e^{i\omega t}, \tag{117.3}$$

где

$$q_x l = m_x \pi, \quad q_y l = m_y \pi, \quad q_z l = m_z \pi, \tag{117.4}$$

а m_x, m_y, m_z — целые числа. Все их можно считать положительными, так как введение отрицательных чисел не приводит к новым, линейно независимым решениям. В выражение (117.3) можно было бы ввести еще постоянную амплитуду, зависящую от m_x, m_y, m_z, но для наших целей в этом нет надобности. Это выражение и представляет общий вид *стоячей волны* в полости. Каждой тройке целых положительных чисел m_x, m_y, m_z, удовлетворяющей условиям (117.4), соответствует одна стоячая волна. Число возможных стоячих волн бесконечно велико.

Будем рассматривать q_x, q_y, q_z как прямоугольные координаты точки трехмерного «пространства волновых векторов» $\boldsymbol{q}$. Эти «изображающие точки» расположатся в узлах кубической решетки, элементарная ячейка которой есть кубик с длиной стороны $\Delta q_x = (\pi/l)\Delta m_x = \pi/l$ и объемом $(\pi/l)^3$. Решетка заполняет только положительный октант пространства волновых векторов, так как все координаты q_x, q_y, q_z положительны. Объем части шара радиуса q, лежащей в этом октанте, равен $^1/_8(4\pi/3)\,q^3 = (\pi/6)\,q^3$. Число изображающих точек в нем и будет равно числу Z стоячих волн, волновые числа которых не превосходят $q = 2\pi/\lambda$. Подавляющее число волн очень короткие, для них величина q очень велика по сравнению с длиной π/l ребра элементарного кубика. Поэтому число стоячих волн в указанном октанте шара найдется делением его объема на объем элементарного кубика. Таким путем получается асимптотическая формула

$$Z = \frac{(\pi/6)\,q^3}{\pi^3/l^3} = \frac{V}{6\pi^2}\,q^3 = \frac{V}{6\pi^2}\,\frac{\omega^3}{c^3}, \tag{117.5}$$

где $V = l^3$ — объем полости. Она справедлива, когда сторона кубической полости очень велика по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi/q$. Можно доказать, что формула (117.5) остается верной и для полости произвольной формы, хотя в этом случае стоячие волны и не будут представляться выражениями вида (117.3).

Дифференцируя (117.5), получим

$$dZ = \frac{V}{2\pi^2}\,q^2\,dq = \frac{V}{2\pi^2 c^3}\,\omega^2\,d\omega. \tag{117.6}$$

Эта асимптотическая формула дает число стоячих волн в интервале частот ω, $\omega + d\omega$. Она, разумеется, справедлива только для достаточно широких интервалов $d\omega$, когда $dZ \gg 1$.

3. Рассуждения существенно не изменятся и в случае векторного (электромагнитного) поля. В этом случае вектор $\boldsymbol{E}$ и его прямоугольные составляющие E_x, E_y, E_z удовлетворяют прежнему волновому уравнению (117.1). Для полости с идеально зеркальными стенками граничные условия требуют обращения в нуль тангенциальных составляющих вектора $\boldsymbol{E}$ на стенках полости. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned}
E_y = E_z &= 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l, \\
E_z = E_x &= 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad \text{и} \quad y = l, \\
E_x = E_y &= 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad \text{и} \quad z = l.
\end{aligned}$$

Стоячая волна, удовлетворяющая этим условиям, имеет вид

$$\begin{aligned}
E_x &= \sin(q_x x + \varphi_x) \sin q_y y \sin q_z z \, e^{i\omega t}, \\
E_y &= \sin q_x x \sin(q_y y + \varphi_y) \sin q_z z \, e^{i\omega t}, \\
E_z &= \sin q_x x \sin q_y y \sin(q_z z + \varphi_z) \, e^{i\omega t},
\end{aligned}$$

где q_x, q_y, q_z определяются прежними формулами (117.4). Что касается фаз φ_x, φ_y, φ_z, то их можно было бы найти из граничных условий, которым на стенках полости удовлетворяют нормальные составляющие электрического вектора $\boldsymbol{E}$. Но для наших целей в этом нет необходимости, так как для определения величин Z и dZ достаточно знать только значения, которые могут принимать составляющие q_x, q_y, q_z. Однако по сравнению с предыдущим случаем выражения (117.5) и (117.6) надо удвоить, так как электромагнитные волны *векторные* и притом *поперечные*. Каждому направлению распространения соответствуют *две волны*, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях, в результате суперпозиции которых может быть получена волна любой поляризации, распространяющаяся в том же направлении. Итак, для электромагнитного поля

$$dZ = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 \, d\omega. \tag{117.7}$$

На каждую стоячую волну в состоянии статистического равновесия приходится в среднем энергия $\overline{\mathscr{E}} = kT$: одна половина ее — электрическая, другая — магнитная. Записав энергию равновесного излучения в полости в спектральном интервале $d\omega$ в виде $Vu_\omega \, d\omega$, из формулы (117.7) получим

$$u_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \overline{\mathscr{E}} = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2. \tag{117.8}$$

Этот результат известен под названием *формулы Рэлея — Джинса*, хотя он независимо и практически одновременно с Рэлеем был получен также Планком из столь же общих, но несколько других соображений (см. пункт 6).

4. Прежде чем обсуждать формулу Рэлея — Джинса, заметим, что в случае полости, заполненной изотропной средой, число стоячих волн будет определяться прежними формулами (117.5) и (117.6), если только в них величину c заменить скоростью света v в рассматриваемой среде (предполагается, что среда изотропная). Отсюда следует, что числа Z и dZ в одном и том же интервале частоты, а с ними и функция u_ω пропорциональны c^3/v^3, т. е. кубу показателя преломления среды n. Но это есть *закон Кирхгофа — Клаузиуса*, доказанный в § 114. Вывод справедлив при более общих предположениях, чем это сделано в тексте. Нет необходимости ссылаться на классическую теорему о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Достаточно, чтобы средняя энергия гармонического осциллятора была функцией только частоты ω, как это имеет место в квантовой теории.

5. Формула Рэлея — Джинса согласуется с общей термодинамической формулой Вина (116.9) или (116.10). Более того, вид этой формулы может быть непосредственно установлен на основе одной только формулы Вина, если ограничиться предельным случаем низких частот. Для этого заметим, что в формуле (116.10) функция $f(\omega/T)$ должна быть возрастающей функцией температуры T и обращаться в нуль при $T = 0$. Ее удобнее рассматривать как функцию аргумента T/ω и разложить в ряд по степеням этого аргумента. Если ограничиться первым членом этого ряда, то получится

$$u_\omega(\omega, T) = CT\omega^2. \tag{117.9}$$

Но по своему виду этот результат совпадает с формулой (117.8). Только коэффициент C остается неопределенным. Зато формула (117.9) выведена в более общих предположениях, чем (117.8). Таким образом, в предельном случае *низких частот* нет сомнений в правильности вида формулы (117.9). И действительно, для достаточно длинных волн (точный критерий приводится в следующем параграфе) формула Рэлея — Джинса прекрасно согласуется с опытом. Она с успехом применяется в длинноволновой инфракрасной области спектра и в радиодиапазоне.

Но классическая статистика требует, чтобы формула Рэлея — Джинса (117.8) была верна *при любых частотах*. Однако это невозможно, так как тогда для интегральной плотности энергии получилось бы бесконечное значение:

$$u = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^2 d\omega = \infty,$$

Отсюда следует, что *по теории Рэлея — Джинса тепловое равновесие между веществом и излучением невозможно*. Этот вывод противоречит опыту. П. С. Эренфест назвал его *ультрафиолетовой катастрофой*. Причина ультрафиолетовой катастрофы заключается в том, что в теории Рэлея — Джинса излучение в полости имеет *бесконечное*, а вещество *конечное* число степеней свободы. Поэтому, если бы было справедливо равномерное распределение энергии по степеням свободы, то при тепловом равновесии вся энергия должна была бы сосредоточиться в излучении.

6. Можно было бы возразить, что классическая статистическая механика, следствием которой является теорема о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы, неприменима к системам с бесконечным числом степеней свободы. Но такое возражение неубедительно. В основе классической статистической механики лежат уравнения классической механики в форме Гамильтона (1805—1865). Хотя они и были установлены для механических систем с конечным числом степеней свободы, но можно показать, что *излучение в полости можно описывать бесконечным, но счетным числом обобщенных координат, также подчиняющихся уравнениям Гамильтона*. Следовательно, и вся система, состоящая из вещества и излучения, будет описываться уравнениями Гамильтона.

Поэтому было бы непонятно, почему теорема о равномерном распределении энергии справедлива для одних и не имеет места для других степеней свободы.

Кроме того, к формуле Рэлея — Джинса независимо пришел также Планк, применивший эту теорему *только к веществу, но не к излучению*. Он провел рассуждение для одномерного гармонического осциллятора, например, квазиупруго связанного электрона, помещенного в полость с равновесным излучением. Под действием хаотически меняющегося электромагнитного поля излучения осциллятор будет совершать колебаиия с хаотически меняющимися амплитудами и фазами, излучая и поглощая при этом электромагнитные волны. Энергия осциллятора будет совершать беспорядочные флуктуации вокруг среднего значения $\overline{\mathscr{E}}$. В результате идейно простых, но несколько длинных вычислений Планк пришел к формуле

$$u_\omega = \frac{\overline{\mathscr{E}}}{\pi^2 c^3}\,\omega^2. \tag{117.10}$$

Если в этой формуле применить к осциллятору (вещество!) теорему о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы, то получится формула Рэлея — Джинса.