§ 118. Формула Планка

1. Правильная формула для спектральной плотности энергии равновесного излучения, подтвержденная всеми экспериментальными исследованиями, была найдена Планком сначала полуэмпирическим путем. Спустя короткое время, Планк нашел теоретический вывод этой формулы, изложенный им 14 декабря 1900 г. на заседании Немецкого физического Общества. Этот день считается днем рождения новой — *квантовой* — физики. Идея о квантах, осторожно формулированная Планком, развилась в стройное и глубокое учение, покорившее всю физику. Решение проблемы равновесного излучения Планком было бы невозможно, если бы в своих исследованиях он не находился в тесном контакте с экспериментаторами. Из экспериментальных работ по излучению абсолютно черного тела особенно следует отметить исследования Лэнглея (1834—1906), Рубенса (1865—1922), Пашена (1865—1947), Вина, Луммера (1860—1925), Э. Принсхейма (1859—1917), Курльбаума.

2. Гипотеза Планка состоит в том, что излучение и поглощение света веществом происходит не непрерывно, а конечными порциями, называемыми *квантами света* или *квантами энергии*. Получим формулу Планка тем же методом, который применялся при выводе формулы Рэлея — Джинса. Тогда гипотезу Планка удобно взять в следующей форме: энергия гармонического осциллятора может принимать не произвольные, а только избранные значения, образующие дискретный ряд: $0,\ \mathscr{E}_0,\ 2\mathscr{E}_0,\ 3\mathscr{E}_0,\ \ldots,$ где $\mathscr{E}_0$ — определенная величина, зависящая только от собственной частоты ω осциллятора. Здесь под осциллятором понимается не только частица, могущая совершать гармонические свободные колебания, но, например, и стоячая волна определенной частоты в полости.

Если осциллятор изолирован, то по истечении достаточно длительного времени он потеряет всю свою энергию на излучение и перейдет на наинизший энергетический уровень с энергией $\mathscr{E} = 0$. Но если осциллятор находится в полости, стенки которой поддерживаются при постоянной температуре, то наряду с излучением будут происходить и акты поглощения, в результате которых возбуждаются и высшие энергетические уровни. Установится вполне определенное состояние детального равновесия, в котором число актов излучения в среднем равно числу обратных актов поглощения. В этом состоянии будут возбуждены все энергетические уровни, но с различными вероятностями. И все, что требуется для нахождения функции $u_\omega(\omega, T)$, — это определить среднюю энергию $\overline{\mathscr{E}}$ осциллятора в этом состоянии статистического равновесия. Такая задача уже была решена нами (см. т. II, § 85). Приведем еще раз это решение в несколько измененной форме. По теореме Больцмана вероятности возбуждения энергетических уровней осциллятора пропорциональны величинам

$$1,\ e^{-\mathscr{E}_0/kT},\quad e^{-2\mathscr{E}_0/kT},\ \ldots$$

Поэтому

$$\overline{\mathscr{E}}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathscr{E}_0 e^{-n\mathscr{E}_0/kT}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n\mathscr{E}_0/kT}}=\mathscr{E}_0\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-nx}},$$

где введено обозначение $x=\mathscr{E}_0/kT$. Значение знаменателя определяется формулой

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}=\frac{1}{1-e^{-x}}.$$

Числитель находится дифференцированием этой формулы по x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}=\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2},$$

и следовательно,

$$\overline{\mathscr{E}}=\frac{\mathscr{E}_0}{e^x-1}=\frac{\mathscr{E}_0}{e^{\mathscr{E}_0/kT}-1}. \tag{118.1}$$

Подставив это значение в формулу (117.8), найдем

$$u_\omega=\frac{\omega^2}{\pi^2c^3}\frac{\mathscr{E}_0}{e^{\mathscr{E}_0/kT}-1}. \tag{118.2}$$

Перейдем в этой формуле к пределу $\mathscr{E}_0\to 0$. Тогда $e^{\mathscr{E}_0/kT}\approx\approx 1+\mathscr{E}_0/kT$, а потому $\overline{\mathscr{E}}=kT$. Получается классическое выражение для средней энергии осциллятора. Формула (118.2) в рассматриваемом предельном случае переходит, следовательно, в формулу Рэлея — Джинса. Этого и следовало ожидать, так как переход к пределу $\mathscr{E}_0\to 0$ фактически означает возвращение к классическому рассмотрению, когда энергия осциллятора меняется не дискретными порциями, а непрерывно. Однако Планк, и это привело его к великому открытию, поставил вопрос, что получится, если предельный переход $\mathscr{E}_0\to 0$ не производить. Величину $\mathscr{E}_0$ он определил из требования, чтобы выражение (118.2) удовлетворяло общей термодинамической формуле Вина (116.10). Приравняв (118.2) и (116.10), видим, что это требование сводится к выполнению соотношения

$$\frac{1}{\pi^2c^3}\frac{\mathscr{E}_0/\omega}{e^{\mathscr{E}_0/kT}-1}=f\left(\frac{\omega}{T}\right). \tag{118.3}$$

Но $\mathscr{E}_0$ есть характеристика *только самого осциллятора*, а потому не может зависеть от температуры T — макроскопического параметра, определяющего состояние вещества и излучения. Величина $\mathcal{E}_0$ может зависеть *только от собственной частоты* ω *осциллятора*. В таком случае, чтобы левая часть равенства (118.3) была функцией только аргумента ω/T, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathcal{E}_0 = \hbar\omega, \tag{118.4}$$

где $\hbar$ — постоянная. Она *универсальна*, поскольку в правой части (118.3) стоит универсальная функция $f(\omega/T)$ аргумента ω/T. Величина $\hbar$ называется *постоянной Планка*. Ее численное значение по современным данным равно

$$\hbar = (1{,}0545887 \pm 0{,}0000057)\cdot 10^{-27}\ \text{эрг}\cdot\text{с} = \\ = (1{,}0545887 \pm 0{,}0000057)\cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}. \tag{118.5}$$

Сам Планк пользовался постоянной

$$h \equiv 2\pi\hbar = (6{,}626176 \pm 0{,}000036)\cdot 10^{-27}\ \text{эрг}\cdot\text{с} = \\ = (6{,}626176 \pm 0{,}000036)\cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}, \tag{118.5a}$$

Если теперь выражение (118.4) подставить в (118.2), то и получится формула Планка

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}. \tag{118.6}$$

Формулу Планка обычно пишут в переменных ν, T:

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}, \tag{118.7}$$

а также в переменных λ, T:

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}. \tag{118.8}$$

При низких частотах, когда

$$\hbar\omega/kT \ll 1, \tag{118.9}$$

формула (118.6) переходит в формулу Рэлея — Джинса (117.8). В другом предельном случае высоких частот, когда

$$\hbar\omega/kT \gg 1, \tag{118.10}$$

получается формула

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\hbar\omega/kT}. \tag{118.11}$$

К формуле такого вида в 1896 г. пришел Вин на основе некоторых произвольных допущений.

Для высоких частот (ультрафиолет) формула Вина прекрасно согласуется с опытом. Однако в области низких частот (инфракрасная область спектра) она дает совершенно неверные результаты, здесь применима формула Рэлея — Джинса. Первоначально Планк и искал эмпирическую формулу, которая бы при низких частотах совпадала с формулой Рэлея — Джинса и непрерывно переходила в формулу Вина в области высоких частот.

Если ввести безразмерную переменную $x = \hbar\omega/kT$, то формулу (118.6) можно записать в виде

$$u_\omega = \frac{k^3T^3}{\pi^2c^3\hbar^2}\frac{x^3}{e^x-1}. \quad (118.6\text{a})$$

При введении другой безразмерной переменной $x = \lambda kT/hc$ получится

$$u_\lambda = \frac{8\pi k^5T^5}{h^4c^4}\frac{1/x^5}{e^{1/x}-1}. \quad (118.8\text{a})$$

Графики функций

$$y_\omega = \frac{x^3}{e^x-1} \quad \text{и} \quad y_\lambda = \frac{1/x^5}{e^{1/x}-1}$$

представлены на рис. 343 и 344. Пунктирные линии на тех же рисунках представляют те же функции, если их аппроксимировать по формулам Вина и Рэлея — Джинса.

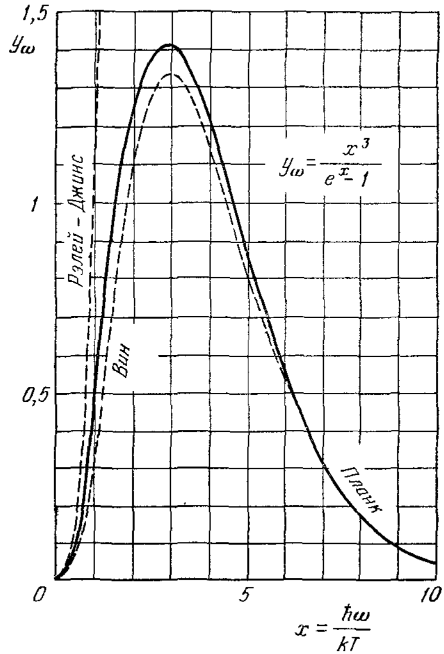

Рис. 343.

3. Пользуясь формулой Планка, уточним значения постоянных в законах Стефана — Больцмана (115.4) и Вина (116.14), а также (116.15). Очевидно, что эти законы должны быть следствиями формулы Планка, так как последняя является частным случаем общей термодинамической формулы Вина (116.9). Согласно формуле Планка, интегральная плотность энергии равновесного излучения в вакууме равна

$$u = \frac{\hbar}{\pi^2c^3}\int_0^\infty \frac{\omega^3\,d\omega}{\exp(\hbar\omega/kT)-1} = \frac{k^4T^4}{\pi^2c^3\hbar^3}\int_0^\infty \frac{x^3e^{-x}\,dx}{1-e^{-x}}$$

(введена безразмерная переменная интегрирования $x = \hbar\omega/kT$). Разложив знаменатель $1-e^{-x}$ в ряд и интегрируя, получим для последнего интеграла

$$\int_0^\infty x^3e^{-x}(1+e^{-x}+e^{-2x}+\ldots)\,dx = 6\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right) = \frac{\pi^4}{15}.$$

так как по известной формуле сумма последнего ряда в скобках равна $\pi^4/90$. Таким образом,

$$u = \frac{\pi^2 k^4}{15c^3\hbar^3} T^4 = \frac{8}{15} \frac{\pi^5 k^4}{c^3 h^3} T^4, \tag{118.12}$$

т. е. получается закон Стефана — Больцмана (115.4), в котором постоянная a выражена через одни только фундаментальные постоянные c, h и k.

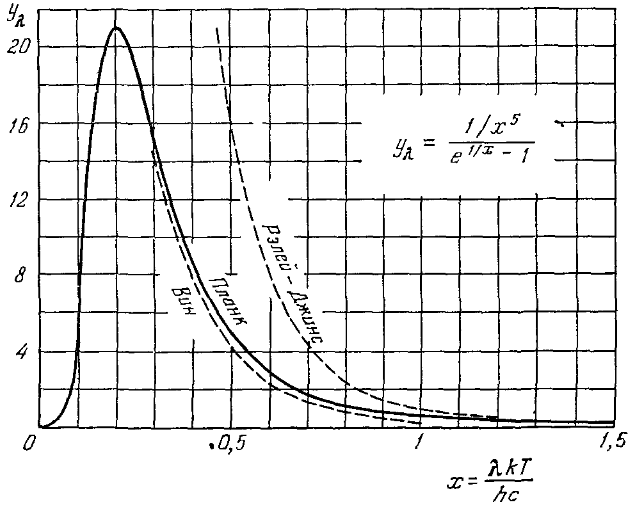

Рис. 344.

На практике более удобна формула для энергетической светимости S излучающей абсолютно черной поверхности. Это есть интегральный лучистый поток, излучаемый наружу во всех направлениях (т. е. в телесный угол 2π) единицей площади такой поверхности в единицу времени. Она связана с яркостью B излучающей поверхности соотношением $S = \pi B = \pi I$ (см. § 22) или, ввиду формулы (112.5), $S = cu/4$. (Эта формула вполне аналогична выражению для среднего числа молекул газа, ударяющихся в единицу времени об единицу площади стенки сосуда, в который газ заключен, см. т. II, § 75.) Подставив сюда выражения (118.12), получим

$$S = \sigma T^4, \tag{118.13}$$

где

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60c^2\hbar^3} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = (5{,}67032 \pm 0{,}00071) \cdot 10^{-8}\ \text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}. \tag{118.14}$$

Величина σ называется *постоянной Стефана — Больцмана.*

4. Найдем теперь постоянную b в законе смещения Вина (116.14). Для этого надо найти значение $\lambda = \lambda_m$, для которого функция (118.8) при постоянном T обращается в максимум. Введем безразмерную переменную $\beta = hc/\lambda kT$ и выразим через нее функцию (118.8). Тогда, как легко убедиться, задача сводится к отысканию минимума функции $(e^\beta - 1)/\beta^5$. Приравняв нулю первую производную этой функции по β, получим уравнение

$$e^{-\beta} + \frac{\beta}{5} - 1 = 0, \qquad (118.15)$$

корень которого $\beta = 4{,}9651142$. Поэтому

$$b = \lambda_m T = hc/(k\beta) = (2{,}897790 \pm 0{,}000090) \cdot 10^{-3}\ \text{м} \cdot \text{К}. \qquad (118.16)$$

Если вместо λ пользоваться частотой ω, то закон Вина надо писать в виде (116.15). Тогда положение максимума, как нетрудно убедиться, будет определяться уравнением

$$(3 - \beta)\, e^\beta - 3 = 0, \qquad (118.17)$$

где $\beta = \hbar\omega/kT = hc/\lambda kT$, т. е. β имеет тот же смысл, что и в предыдущем случае. Корень этого уравнения $\beta' = 2{,}8214393$. Если снова перейти к длинам волн, то максимуму функции u_ω соответствует длина волны λ'_m, определяемая условием

$$\lambda'_m T = hc/(k\beta'). \qquad (118.18)$$

Таким образом, максимум на кривой частот сдвинут в длинноволновую сторону относительно максимума на кривой длин волн и притом так, что $\lambda'_m/\lambda_m = \beta/\beta' \approx 1{,}76$.

Заметим еще, что, измерив на опыте величины c, σ и b, можно по формулам (118.14) и (118.16) вычислить универсальные постоянные k и h, что и было впервые сделано Планком. После этого можно найти число Авогадро $N = R/k$ и элементарный заряд $e = F/N$, где R — универсальная газовая постоянная, а F — число Фарадея. Когда Планк производил эти вычисления, величины k, N и e были известны с малой точностью. Планк получил для них, а также для постоянной h значения, мало отличающиеся от современных.

5. Формулу Планка можно также получить, рассматривая равновесное излучение в полости как *фотонный газ*, к которому применима *статистика Бозе — Эйнштейна* (см. т. II, § 82). Особенность этого газа состоит в том, что в результате взаимодействия с веществом фотоны могут рождаться и уничтожаться. Число их N в полости не остается постоянным. При равновесии оно устанавливается таким, что свободная энергия $F\ (T,\ V,\ N)$ при заданных T и V обращается в минимум, а потому $\partial F/\partial N = 0$. Но $\partial F/\partial N$ есть *химический потенциал* μ газа. Таким образом, для фотонов должно быть $\mu = 0$. Поэтому общая формула Бозе — Эйнштейна

$$\bar{n}_i = \frac{1}{\exp\left[(\mathscr{E}_i - \mu)/kT\right] - 1}, \tag{118.19}$$

определяющая среднее число частиц в i-м квантовом состоянии, в случае фотонов переходит в формулу

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \tag{118.20}$$

Число квантовых состояний в интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$ определяется выражением (117.7). Умножив $\bar{n}$ на это число, на энергию фотона $\hbar\omega$ и разделив на объем полости V, получим формулу Планка (118.6).

§ 119. Спонтанное и индуцированное излучение

1. В 1916 г. Эйнштейн дал новый вывод формулы Планка, основанный на представлениях Бора о механизме излучения. В этой работе было введено понятие *индуцированного излучения* — явления, на котором основан принцип действия лазера.

Пусть $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3$, ... — значения энергии, которые может принимать атом или вообще любая атомная система. Атом может самопроизвольно перейти из высшего энергетического состояния $\mathscr{E}_n$ в низшее $\mathscr{E}_m$ с испусканием света. Такое излучение называется *спонтанным*. Если атом находится в световом поле, то последнее может вызывать переходы как с высшего уровня $\mathscr{E}_n$ на низший $\mathscr{E}_m$, так и обратно с низшего $\mathscr{E}_m$ на высший $\mathscr{E}_n$. Первые переходы сопровождаются излучением света. Оно и называется *индуцированным (вынужденным)* излучением. Обратные переходы сопровождаются поглощением света атомом.

Имеются аналоги описанных явлений и в классической физике. Если атом рассматривать как колебательную систему, то в поле световой волны она будет совершать вынужденные колебания. В зависимости от соотношения фаз между колебаниями этой системы и светового поля амплитуда колебаний атома может как увеличиваться (поглощение света), так и уменьшаться (вынужденное излучение).

Эйнштейн применил к описанию процессов спонтанного и вынужденного излучения *вероятностные методы*. При этом для проблемы равновесного излучения не имеет значения, присуща ли вероятность ансамблю физических объектов или самим элементарным законам, управляющим их поведением.

Рассмотрим теперь много одинаковых атомов в световом поле. Последнее будем предполагать изотропным и неполяризованным. Тогда отпадает вопрос о зависимости коэффициентов, вводимых