быть $\mu = 0$. Поэтому общая формула Бозе — Эйнштейна

$$\bar{n}_i = \frac{1}{\exp[(\mathcal{E}_i - \mu)/kT] - 1}, \qquad (118.19)$$

определяющая среднее число частиц в i-м квантовом состоянии, в случае фотонов переходит в формулу

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \qquad (118.20)$$

Число квантовых состояний в интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$ определяется выражением (117.7). Умножив $\bar{n}$ на это число, на энергию фотона $\hbar\omega$ и разделив на объем полости V, получим формулу Планка (118.6).

§ 119. Спонтанное и индуцированное излучение

1. В 1916 г. Эйнштейн дал новый вывод формулы Планка, основанный на представлениях Бора о механизме излучения. В этой работе было введено понятие *индуцированного излучения* — явления, на котором основан принцип действия лазера.

Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \ldots$ — значения энергии, которые может принимать атом или вообще любая атомная система. Атом может самопроизвольно перейти из высшего энергетического состояния $\mathcal{E}_n$ в низшее $\mathcal{E}_m$ с испусканием света. Такое излучение называется *спонтанным*. Если атом находится в световом поле, то последнее может вызывать переходы как с высшего уровня $\mathcal{E}_n$ на низший $\mathcal{E}_m$, так и обратно с низшего $\mathcal{E}_m$ на высший $\mathcal{E}_n$. Первые переходы сопровождаются излучением света. Оно и называется *индуцированным (вынужденным)* излучением. Обратные переходы сопровождаются поглощением света атомом.

Имеются аналоги описанных явлений и в классической физике. Если атом рассматривать как колебательную систему, то в поле световой волны она будет совершать вынужденные колебания. В зависимости от соотношения фаз между колебаниями этой системы и светового поля амплитуда колебаний атома может как увеличиваться (поглощение света), так и уменьшаться (вынужденное излучение).

Эйнштейн применил к описанию процессов спонтанного и вынужденного излучения *вероятностные методы*. При этом для проблемы равновесного излучения не имеет значения, присуща ли вероятность ансамблю физических объектов или самим элементарным законам, управляющим их поведением.

Рассмотрим теперь много одинаковых атомов в световом поле. Последнее будем предполагать изотропным и неполяризованным. Тогда отпадает вопрос о зависимости коэффициентов, вводимых ниже, от поляризации и направления излучения. Пусть N_m и N_n — числа атомов в состояниях $\mathscr{E}_m$ и $\mathscr{E}_n$, причем состояния $\mathscr{E}_m$ и $\mathscr{E}_n$ могут быть взяты какими угодно из ряда допустимых состояний $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3$, ... Среднее число переходов атомов из состояния $\mathscr{E}_n$ в состояние $\mathscr{E}_m$ в единицу времени из-за спонтанного излучения будет пропорционально исходному числу атомов N_n. Представим его в виде $A_n^m N_n$. Эйнштейн постулировал, что из-за индуцированного излучения среднее число переходов между теми же уровнями будет по-прежнему пропорционально N_n, а также спектральной плотности излучения $u\,(\omega_{mn})$ при частоте испускаемого света, соответствующей рассматриваемому переходу. Обозначим это число через $B_n^m N_n u\,(\omega_{mn})$. Аналогично, среднее число переходов с уровня $\mathscr{E}_m$ на уровень $\mathscr{E}_n$ из-за поглощения света представится как $B_m^n N_m u\,(\omega_{mn})$. Величины A_n^m, B_n^m, B_m^n называются *коэффициентами Эйнштейна.* Они являются характеристиками *только самого атома* и могут зависеть лишь от частоты ω_{mn}.

2. Допустим теперь, что поле излучения, в котором находятся атомы, равновесное и имеет температуру T. Тогда имеет место детальное равновесие, а потому

$$A_n^m N_n + B_n^m N_n u\,(\omega_{mn}) = B_m^n N_m u\,(\omega_{mn}). \tag{119.1}$$

Если уровни энергии $\mathscr{E}_m$ и $\mathscr{E}_n$ *простые,* а не кратные, то коэффициенты Эйнштейна связаны соотношением

$$B_m^n = B_n^m. \tag{119.2}$$

Действительно, будем повышать температуру системы. Коэффициенты Эйнштейна при этом меняться не будут, так как они от температуры не зависят. Спонтанное же излучение будет играть все меньшую и меньшую роль по сравнению с индуцированным. Если им пренебречь, то условие детального равновесия примет вид $B_n^m N_n = B_m^n N_m$. Но, согласно формуле Больцмана, при $T \to \infty$ населенности уровней N_n и N_m должны сравняться. Отсюда и следует, что $B_m^n = B_n^m$.

Допустим теперь, что уровень $\mathscr{E}_m$ состоит из g_m, а уровень $\mathscr{E}_n$ — из g_n слившихся простых энергетических подуровней. Такие уровни называются *кратными*, а целые числа g_m и g_n — их *кратностями.* Вероятность перехода атома с уровня $\mathscr{E}_m$ на каждый простой подуровень $\mathscr{E}_n$ меньше вероятности перехода на кратный уровень $\mathscr{E}_n$ в g_n раз, т. е. она равна uB_m^n/g_n. Аналогично, вероятность перехода с уровня $\mathscr{E}_n$ на простой подуровень $\mathscr{E}_m$ будет uB_n^m/g_m. Но по доказанному эти вероятности равны между собой. Поэтому для кратных уровней соотношение (119.2) заменится на $B_m^n/g_n = B_n^m/g_m$ или

$$g_m B_m^n = g_n B_n^m. \tag{119.3}$$

Так как спектральная плотность излучения $u(\omega)$ не зависит от того, какие атомы использованы для ее вычисления, то для простоты расчета энергетические уровни $\mathscr{E}_n$, $\mathscr{E}_m$ можно считать простыми. Тогда с учетом формулы Больцмана

$$\frac{N_m}{N_n} = \exp\left(\frac{\mathscr{E}_n - \mathscr{E}_m}{kT}\right)$$

из (119.1) получим

$$u(\omega_{mn}) = \frac{\alpha(\omega_{mn})}{\exp[(\mathscr{E}_n - \mathscr{E}_m)/(kT)] - 1}, \tag{119.4}$$

где $\alpha(\omega_{mn}) = A_n^m/B_n^m$. Сравнение этого выражения с формулой Вина (116.10) показывает, что разность $\mathscr{E}_n - \mathscr{E}_m$ должна быть линейной функцией частоты, т. е.

$$\mathscr{E}_n - \mathscr{E}_m = \hbar\omega_{mn}. \tag{119.5}$$

В предельном случае низких частот (или высоких температур)

$$u(\omega_{mn}) = \frac{\alpha(\omega_{mn})\, kT}{\hbar\omega_{mn}}.$$

Но в этом случае применима формула Рэлея — Джинса, так что

$$\alpha(\omega_{mn}) = \frac{\hbar\omega_{mn}^3}{\pi^2 c^3}. \tag{119.6}$$

Подставим теперь выражения (119.5) и (119.6) в формулу (119.4). При этом индексы m и n можно опустить, так как в нашем выводе уровни энергии $\mathscr{E}_m$ и $\mathscr{E}_n$ можно взять произвольными. Тогда получится формула Планка (118.6).

Из универсальности функции (118.6) следует, что и постоянная $\hbar$, введенная посредством соотношения (119.5), также универсальна. Формула (119.5), определяющая частоту излучаемого света при квантовых переходах между энергетическими уровнями, называется *правилом частот Бора*.

Заметим еще, что если бы не учитывать индуцированное излучение, т. е. положить $B_n^m u(\omega_{mn}) = 0$, то вместо формулы Планка получился бы ее предельный случай — формула Вина (118.11). Отсюда следует, что *формула Планка с неизбежностью приводит к заключению о существовании индуцированного излучения.* При низких температурах индуцированное излучение, очевидно, несущественно по сравнению со спонтанным. Вот почему в области низких температур, когда $\hbar\omega/kT \gg 1$, справедлива формула Вина.

ЗАДАЧИ

1. Определить среднее число фотонов n в единице объема полости, заполненной равновесным (черным) излучением, при температуре T.

Ответ.

$$n=\frac{k^3T^3}{\hbar^3\pi^2c^3}\int\limits_0^\infty \frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}}dx=\frac{2k^3T^3}{\hbar^3\pi^2c^3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right)\approx 1{,}202\frac{2k^3T^3}{\hbar^3\pi^2c^3}=20{,}5T^3,$$

где T — температура в кельвинах.

2. В полости с зеркальными стенками находится изотропное излучение с средней плотностью n фотонов в единице объема. Определить среднее число фотонов z, ежесекундно ударяющихся об единицу площади стенки.

Ответ. $z=\frac{1}{4}nc$.

3. Решить предыдущую задачу в предположении, что излучение равновесное, а температура стенок полости равна T. Какое среднее число фотонов N будет выходить ежесекундно из полости через отверстие в стенке полости площадью $s = 1$ см^2, если $T = 1000$ К?

Ответ. $n\approx 2{,}404\,\frac{k^3T^3}{\hbar^3\pi^2c^3}$, $N=0{,}6\,\frac{k^3T^3}{\hbar^3\pi^2c^2}\approx 1{,}5\cdot 10^{20}$.

4. В какой области спектра равновесного (черного) излучения при температуре $T = 300$ К интенсивность индуцированного излучения превосходит интенсивность спонтанного?

Ответ. Если $\lambda \geqslant hc/(kT\ln 2)$, то интенсивность индуцированного излучения становится равной или большей интенсивности спонтанного. При $T = 300$ К получаем $\lambda \geqslant 692$ мкм.

5. При какой температуре равновесного (черного) излучения индуцированное излучение в видимой области ($\lambda = 550$ нм) превосходит спонтанное?

Ответ. $T > hc/(k\lambda\ln 2) \approx 3{,}8\cdot 10^4$ К.

6. Среднее число фотонов в единице объема равновесного (черного) излучения, приходящееся на интервал частот $(\omega,\ \omega+d\omega)$ или на соответствующий ему интервал длин волн $(\lambda,\ \lambda+d\lambda)$, можно представить в виде $dN = f(\omega, T)\,d\omega = \varphi(\lambda, T)\,d\lambda$, где T — температура излучения. Найти положение максимумов функций $f(\omega, T)$ и $\varphi(\lambda, T)$ при фиксированной температуре T.

Ответ. Для функции $f(\omega, T)$ максимум получается при $\hbar\omega/(kT) = x$, где x — корень уравнения $(x-2)\,e^x + 2 = 0$, т. е. $x = 1{,}593624$. Соответствующая длина волны λ_1 находится из соотношения

$$\lambda_1 T=\frac{2\pi\hbar c}{kx}=\frac{hc}{kx}=0{,}902867\ \text{см}\cdot\text{К}.$$

Для функции $\varphi(\lambda, T)$ максимум получается при $\lambda=\lambda_2$, причем $\frac{hc}{\lambda kT}=\xi$, где ξ — корень уравнения $(\xi-4)\,e^\xi+4=0$, т. е. $\xi = 3{,}920690$. Таким образом, $\lambda_2 T = 0{,}368967$ см·К. Следовательно, $\lambda_2 < \lambda_1$.

7. Равновесное излучение заключено в полости, стенки которой поддерживаются при постоянной (абсолютной) температуре T. Вычислить флуктуации энергии $\mathscr{E}$ такого излучения в объеме V в спектральном интервале $(\omega,\ \omega+d\omega)$, пользуясь формулами 1) Вина, 2) Рэлея — Джинса, 3) Планка, и интерпретировать полученные результаты с точки зрения корпускулярных и волновых представлений о свете.

Решение. Применяя к (97,15) формулы Вина, Рэлея — Джинса и Планка, получим

$$\overline{\Delta\mathscr{E}^2}=\overline{\mathscr{E}}\hbar\omega \qquad \text{(Вин)}, \tag{119.7}$$

$$\overline{\Delta\mathscr{E}^2}=\overline{\mathscr{E}}kT=\frac{\pi^2c^3}{V\omega^2\,d\omega}\overline{\mathscr{E}}^2 \qquad \text{(Рэлей—Джинс)}, \tag{119.8}$$

$$\overline{\Delta\mathscr{E}^2}=\overline{\mathscr{E}}\hbar\omega+\frac{\pi^2c^3}{V\omega^2\,d\omega}\overline{\mathscr{E}}^2 \qquad \text{(Планк)}. \tag{119.9}$$

Формула (119.7) имеет такой же вид, что и формула (97.7) для флуктуации числа частиц идеального газа. Ее можно было бы получить из корпускулярных представлений, рассматривая излучение как газ независимых частиц. Напротив, формула (119.8) соответствует волновым представлениям о свете. Здесь флуктуации возникают из-за суперпозиции волн различных частот. Формула (119.9) соответствует синтезу обоих представлений.

8. Освещенность E, создаваемая звездой первой величины на поверхности Земли при нормальном падении света, составляет около 10^{-6} лк. Можно ли объяснить мерцание звезд квантовыми флуктуациями света?

Решение. Среднее число фотонов, попадающее от звезды в зрачок глаза в одну секунду,

$$\bar{N}=\frac{EAs}{h\lambda/c}\approx 6\cdot 10^{34}\sim 10^{34},$$

где A — механический эквивалент света, площадь зрачка глаза s принята равной 0,5 см^2, а длина волны $\lambda = 550$ нм. В рассматриваемой области спектра с хорошим приближением можно пользоваться формулой Вина, а потому

$$\overline{\Delta N^2}=\bar{N},\quad \frac{1}{\bar{N}}\sqrt{\overline{\Delta N^2}}\sim 10^{-17}.$$

Отсюда видно, что квантовые флуктуации света к мерцанию звезд не имеют отношения.