

К изложенному надо еще добавить, что следует понимать под ε в уравнениях (123.4), когда среда *обладает дисперсией*. Ответ заключается в следующем. Если взять какое-либо приближение, то в правой части уравнений (123.4) появятся слагаемые не только с исходной частотой ω , но и с частотами 2ω , 3ω , ... Могут появиться и другие частоты, как, например, при параметрической генерации света (см. § 126). Надо E и H искать в виде суммы монохроматических полей с теми же частотами. Уравнение (123.4) следует написать для каждой частоты в отдельности, сохранив в правой части только члены той же частоты и понимая под ε значение функции ε также при той же частоте. Именно такой символический смысл имеет система уравнений (123.4).

§ 124. Первое приближение. Оптическое детектирование. Генерация вторых гармоник, суммарной и разностной частот

1. Нелинейная добавка (123.3) к поляризации среды, вычисленная в нулевом приближении, равна

$$P_{\text{нл}} = \alpha_2 \bar{E} \bar{E} = \frac{\alpha_2 A^2}{2} + \frac{\alpha_2 A^2}{2} \cos 2(\omega t - kr). \quad (124.1)$$

Первое слагаемое в этом выражении не зависит от времени. С ним связано так называемое *оптическое детектирование*, т. е. возникновение в нелинейной среде постоянной электрической поляризации при прохождении через нее мощной световой волны. Это явление аналогично выпрямлению синусоидального электрического тока. Его можно наблюдать, если между обкладками конденсатора, одна из которых заземлена через большое сопротивление, поместить кристалл (например, кварца) и пропустить через него световой пучок от рубинового лазера. Вследствие детектирования световой пучок возбуждает в цепи конденсатора импульс электрического тока, который можно обнаружить с помощью осциллографа.

2. Второе слагаемое в (124.1) гармонически меняется во времени. С ним связана генерация в нелинейной среде второй гармоники, т. е. волны с удвоенной частотой $\omega_2 = 2\omega$. Для нахождения поля этой гармоники поступаем так, как изложено в предыдущем параграфе. Переходя к комплексной форме, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H - \frac{\varepsilon(2\omega)}{c} \frac{\partial E}{\partial t} &= i\omega \frac{4\pi\alpha_2}{c} A A e^{i2(\omega t - kr)}, \\ \operatorname{rot} E - \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{div} E = \operatorname{div} H &= 0. \end{aligned} \quad (124.2)$$

Найдем сначала частное решение этой системы

$$E = A_1 e^{i2(\omega t - kr)}, \quad H = B_1 e^{i2(\omega t - kr)},$$

соответствующее *вынужденным колебаниям* с частотой 2ω . Из второго уравнения обычным путем находим, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} *взаимно перпендикулярны*. Аналогично, из последних двух уравнений следует, что $(\mathbf{k}\mathbf{A}_1) = (\mathbf{k}\mathbf{B}_1) = 0$, т. е. рассматриваемая плоская волна *поперечна как в отношении вектора \mathbf{E} , так и в отношении вектора \mathbf{H}* . Учтя это, а также соотношение $k^2 a^2 = \omega^2 \varepsilon$ (ω), из первых двух уравнений получим

$$\mathbf{A}_1 = \frac{2\pi\alpha_2}{\varepsilon(\omega) - \varepsilon(2\omega)} \mathbf{A} \mathbf{A}.$$

Надо еще удовлетворить условию, чтобы на входе в нелинейную среду (где мы поместим начало координат) интенсивность второй гармоники обращалась в нуль. Для этого к частному решению, найденному выше, надо добавить *общее решение* соответствующей однородной системы уравнений и подобрать амплитуду его так, чтобы указанное условие выполнялось. Возвращаясь снова к вещественной форме записи, таким путем получим

$$\mathbf{E}_1 = \frac{2\pi\alpha_2}{\varepsilon(\omega) - \varepsilon(2\omega)} \mathbf{A} \mathbf{A} [\cos(\omega_2 t - 2\mathbf{k}\mathbf{r}) - \cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})], \quad (124.3)$$

где

$$k_2^2 = \omega_2^2 \varepsilon(\omega_2) / c^2.$$

3. Таким образом, вторая гармоника представляет собой наложение двух волн одной и той же частоты $\omega_2 = 2\omega$: *вынужденной волны* $\cos(\omega_2 t - 2\mathbf{k}\mathbf{r})$ и *свободно распространяющейся волны* $-\cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})$. Обе волны распространяются в одном и том же направлении, но с *различными фазовыми скоростями*. Поэтому по мере распространения будет меняться разность фаз между ними и возникнет характерное в таких случаях явление *биений*. Интенсивность I_1 второй гармоники найдется возведением в квадрат и последующим усреднением по времени выражения (124.3). Опуская численные коэффициенты и обозначая через I интенсивность исходной волны, таким путем найдем

$$I_1 \sim \frac{\alpha_2^2 \omega^2 x^2 I^2}{n^2 c^2} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \quad (124.4)$$

где x — расстояние, пройденное волной, и введено обозначение

$$\beta = \frac{(2k - k_2) \mathbf{r}}{2} = \frac{(2k - k_2) x}{2}. \quad (124.5)$$

При этом в знаменателе формулы (124.4) мы пренебрегли различием между показателями преломления $n(\omega)$ и $n(2\omega)$.

Когда $\beta = 0, \pi, 2\pi, \dots$, интенсивность первой гармоники обращается в нуль. Максимумы интенсивности получаются примерно

посередине между минимумами. Таким образом, с возрастанием x интенсивность второй гармоники возрастает, когда β лежит приблизительно между нулем и $\pi/2$, между π и $3\pi/2$ и т. д. В этих случаях энергия переходит от исходной волны ко второй гармонике. Если же β лежит приблизительно между $\pi/2$ и π , между $3\pi/2$ и 2π и т. д., то с возрастанием x интенсивность второй гармоники убывает. В этих случаях энергия снова возвращается от второй гармоники к исходной волне. Такой процесс перекачки энергии периодически повторяется по мере распространения исходной волны.

Условие $\beta = \pi/2$ определяет расстояние x , до которого происходит перекачка энергии от исходной волны ко второй гармонике с последующим возвращением ее опять в исходную волну. Это расстояние называется когерентной длиной. Для нее из указанного условия нетрудно получить

$$l_{\text{ког}} = \frac{\lambda}{4 |n(\omega) - n(2\omega)|}, \quad (124.6)$$

где λ — длина исходной волны, $n(\omega)$ — ее показатель преломления, а $n(2\omega)$ — показатель преломления второй гармоники. Чем больше когерентная длина, тем интенсивнее происходит перекачка энергии от исходной волны во вторую гармонику.

Когда

$$n(\omega) = n(2\omega), \quad \text{а потому} \quad 2k = k_2, \quad (124.7)$$

то длина когерентности $l_{\text{ког}}$ обращается в бесконечность. В этом случае переход энергии особенно интенсивен и должен происходить от исходной волны к ее второй гармонике. Обе волны $\cos(\omega_2 t - 2kr)$ и $-\cos(\omega_2 t - k_2 r)$ распространяются с одинаковыми фазовыми скоростями, а потому фазовое соотношение между ними сохраняется все время при их распространении. С этим, как и при всяком резонансе, и связана эффективность обмена энергией между взаимодействующими волнами. Поэтому условие (124.7) называется фазовым синхронизмом между рассматриваемыми волнами. В этом случае $\beta = 0$ при любом x , и из (124.4) предельным переходом $\beta \rightarrow 0$ получаем

$$I_1 = \frac{\alpha_2^2 \omega^2 x^2 I^2}{n^2 c^2}. \quad (124.8)$$

Конечно, при достаточно больших x формула (124.8) перестает быть верной, так как при $x \rightarrow \infty$ она дает $I_1 \rightarrow \infty$, а интенсивность второй гармоники не может превосходить интенсивности I исходной волны. В этом случае метод последовательных приближений, с помощью которого была получена формула (124.8), неприменим.

Когерентную длину $l_{\text{ког}}$ можно определить как максимальное расстояние, на котором приближенно сохраняется фазовый синхро-

низм между падающей и переизлученной волнами, т. е. расстояние, на котором набег фазы одной из этих волн относительно другой не превышает π .

4. Генерация второй гармоники впервые была обнаружена Франкеном в 1961 г. Излучение рубинового лазера фокусировалось на кристалле кварца, расположенном между двумя фильтрами, прозрачными только в узких окрестностях длин волн $\lambda_1 = 694,3$ нм и $\lambda_2 = \lambda_1/2 = 347,0$ нм. Из кристалла, помимо исходного красного излучения лазера ($\lambda_1 = 694,3$ нм), выходило также ультрафиолетовое излучение с половинной длиной волны 347,0 нм. В первых опытах Франкена в энергию второй гармоники превращалось $\sim 10^{-8}$ энергии первичного излучения.

Почему лишь столь ничтожная доля энергии переходила ко второй гармонике? Это объясняется малостью когерентной длины $l_{\text{кор}}$ в кварце. Для интенсивного обмена энергией надо удовлетворить условию фазового синхронизма $n(\omega) = n(2\omega)$. Но это невозможно сделать для изотропных сред в прозрачной области спектра, так как в этой области показатель преломления $n(\omega)$ монотонно возрастает с частотой. Равенство $n(\omega) = n(2\omega)$ может удовлетворяться только тогда, когда частота ω взята в прозрачной области, а 2ω — в области сильного поглощения или наоборот.

Однако, как указали в 1962 г. Джордмейн и Терхьюн и подтвердили это указание на опыте, фазовый синхронизм на частотах ω и 2ω можно осуществить между обыкновенной и необыкновенной

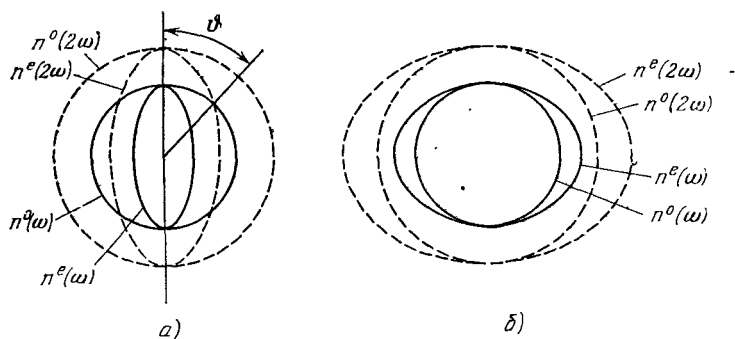


Рис. 353.

волнами в некоторых кристаллах. На рис. 353 представлены обыкновенный n^o и необыкновенный n^e показатели преломления одноосного кристалла в зависимости от направления волновой нормали. Сплошные кривые относятся к частоте ω , пунктирные — к удвоенной частоте 2ω . На первом из этих двух рисунков кривые $n^o(\omega)$ и $n^e(2\omega)$ пересекаются между собой. Точкам их пересечения соот-

ветствуют направления, для которых между обыкновенной волной с частотой ω и ее гармоникой с частотой 2ω выполняется фазовый синхронизм. Эти направления называются *направлениями синхронизма*, а угол θ между ними и оптической осью кристалла — *углом синхронизма*.

Хотя обе волны и поляризованы в различных плоскостях, но они могут нелинейно взаимодействовать между собой, поскольку в кристаллах квадратичная поляризуемость есть не скаляр α_2 , а *тензор* $(\alpha_2)_{jkl}$. Поэтому при наличии фазового синхронизма должна происходить перекачка энергии от исходной волны к ее второй гармонике, что и наблюдается на самом деле. Таким путем удается более половины падающего света превратить во вторую гармонику. Понятно, что при таких больших интенсивностях второй гармоники метод последовательных приближений может оказаться неточным и даже неприменимым. Однако качественное заключение о влиянии фазового синхронизма *остается в силе*.

Подходящим кристаллом может быть одноосный кристалл *дигидрофосфата калия* KN_3PO_4 (сокращенно KDP). Для этого кристалла при $\lambda = 1,15$ мкм, как показывает расчет, подтверждаемый наблюдениями, угол синхронизма равен $41^\circ 35'$. Существует красивый демонстрационный опыт. Кристалл KDP, вырезанный параллельно оптической оси, кладется на столик, который может вращаться вокруг вертикальной оси. Оптическая ось кристалла должна быть горизонтальна. На кристалл направляется мощный инфракрасный луч от лазера на неодимовом стекле ($\lambda = 1060$ нм). Луч лазера невидим, но его можно обнаружить с помощью листа черной бумаги. Бумага загорается, если ее поместить на пути луча. При произвольной ориентации кристалла никакого видимого света не возникает. Но если кристалл медленно поворачивать, то из него выходит ослепительно яркий зеленый луч ($\lambda = 530$ нм), когда станет выполняться условие синхронизма.

Не всякий одноосный кристалл годится для опыта такого типа. Не годится, например, кристалл кварца, в котором, как видно из рис. 353, б, условие фазового синхронизма не выполняется ни для какого направления.

5. Остановимся теперь на *генерации волн с суммарной и разностной частотами*. Природа этого явления в точности такая же, что и генерация второй гармоники. Поэтому достаточно только указать, в чем состоит явление. Если на нелинейную среду направить два мощных пучка света с различными частотами ω_1 и ω_2 , то из нее будет выходить свет *не только с первоначальными частотами ω_1 и ω_2 и их гармониками $2\omega_1$ и $2\omega_2$, но и свет с суммарной $\omega_1 + \omega_2$ и разностной $\omega_1 - \omega_2$ частотами*. Подобными методами генерации волн разных частот удается далеко проникнуть в инфракрасную и ультрафиолетовую области спектра. Например, удалось получить ультрафиолетовое излучение с длиной волны ≈ 80 нм.