между поршнем и дном трубки равно l_0. Определить период малых колебаний, которые возникнут при отклонении поршня из положения равновесия, в предположении, что они являются изотермическими, а газ идеальным. Площадь поперечного сечения трубки равна S, нормальное атмосферное давление P_0. Рассмотреть предельный случай, когда $P_0 = 0$.

Ответ. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{Ml_0}{Mg+P_0S}}$.

В предельном случае, когда $P_0 = 0$, $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l_0}{g}}$, т. е. период колебаний совпадает с периодом математического маятника длины l_0.

9. Решить предыдущую задачу в предположении, что колебания — адиабатические. Будет ли сказываться на результате зависимость адиабатической постоянной газа γ от температуры?

Ответ. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{1}{\gamma}\dfrac{Ml_0}{Mg+P_0S}}$. Формула верна и в том случае, когда γ зависит от температуры, так как для ее получения используется уравнение адиабаты в дифференциальной форме. В предельном случае, когда $P_0 = 0$, $T=2\pi\sqrt{\dfrac{1}{\gamma}\dfrac{l_0}{g}}$.

§ 22. Определение C_P/C_V методом Клемана и Дезорма

Клеман (ум. 1841) и Дезорм (1777—1862) в 1819 году предложили и осуществили следующий метод измерения отношения теплоемкостей $\gamma=C_P/C_V$ для газов. Стеклянный баллон вместимостью в несколько литров (рис. 20) наполняется исследуемым газом при атмосферном давлении. С помощью насоса в баллон дополнительно накачивается небольшая порция того же газа, затем кран K_1 закрывается. Спустя короткое время температура газа в баллоне сравняется с температурой окружающего воздуха. После этого водяным манометром измеряют давление газа в баллоне. Обозначим это давление P_1, а температуру газа T_1. Затем на короткое время открывают кран K_2. При открытом кране K_2 часть газа выйдет из баллона, и его давление P_0 сравняется с атмосферным. При этом газ, оставшийся

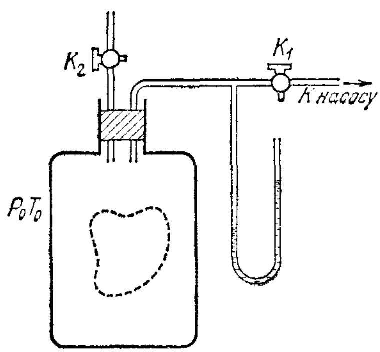

Рис. 20.

в баллоне, адиабатически расширится, совершив работу против давления окружающего воздуха. Вследствие этого его температура понизится до некоторого значения T. Во все время этого кратковременного процесса кран K_2 открыт. Затем кран K_2 быстро закрывается, и газ начинает медленно нагреваться, пока его температура не сравняется с температурой T_0 окружающего воздуха. Пусть давление газа в этот момент равно P_2. По измеренным давлениям P_1, P_2, P_0 можно вычислить отношение теплоемкостей $\gamma = C_P/C_V$.

Для этого мысленно выделим внутри нашего баллона произвольную порцию газа, ограниченную замкнутой поверхностью. Эта поверхность на рис. 20 изображена пунктиром. Она играет роль оболочки, в которую заключена рассматриваемая порция газа. В различных процессах газ, заключенный в эту «оболочку», будет расширяться и сжиматься, совершая работу против давления окружающего газа и обмениваясь с ним теплом. Поскольку кинетическая энергия возникающего макроскопического движения невелика, эти процессы могут рассматриваться как квазистатические. В моменты отсчета давления параметры, характеризующие состояние газа внутри «оболочки», имеют следующие значения:

1 состояние: P_1 T_0 V_1,

2 состояние: P_0 T V_2,

3 состояние: P_2 T_0 V_2.

Разности давлений $P_1 - P_0$ и $P_2 - P_1$ в сотни и тысячи раз меньше атмосферного давления P_0, а потому для упрощения вычислений с этими разностями можно обращаться как с бесконечно малыми дифференциалами. То же относится и к соответствующим изменениям объема выделенной порции газа. Переход газа из состояния 1 в состояние 2 совершается адиабатически, а потому соответствующие изменения давления и объема связаны уравнением адиабаты (21.2). Полагая в нем $dV = V_2 - V_1$, $dP = P_0 - P_1$, можно написать

$$\gamma P (V_2 - V_1) + V (P_0 - P_1) = 0.$$

В состояниях же 1 и 3 температуры газа одинаковы, а потому в этих состояниях произведение PV одно и то же. Следовательно, соответствующие изменения давления и объема связаны соотношением $PdV + VdP = 0$, или

$$P (V_2 - V_1) + V (P_2 - P_1) = 0.$$

Из этого соотношения совместно с предыдущим получаем

$$\gamma = \frac{P_1 - P_0}{P_1 - P_2}. \qquad (22.1)$$

В эту формулу входит отношение разностей давлений, а потому безразлично, в каких единицах измерять изменения давления. Проще всего разности давлений измерять в миллиметрах водяного столба с помощью манометра, как это показано на рис. 20.

ЗАДАЧА

Предполагая, что адиабатическая постоянная γ не зависит от температуры, обобщить формулу (22.1), не вводя предположения о малости разности давлений $P_1 - P_0$ и $P_1 - P_2$.

Ответ. $\gamma = \dfrac{\ln \dfrac{P_1}{P_0}}{\ln \dfrac{P_1}{P_2}}$.

При выводе формулы (22.1) использовалось уравнение адиабаты в дифференциальной форме (21.2), а потому формула справедлива не только в том случае, когда отношение γ постоянно, но и в тех случаях, когда оно меняется при изменении температуры. По этой причине мы и отдали предпочтение уравнению адиабаты в дифференциальной форме и не пользовались при выводе уравнением ее в интегральной форме (21.3), предполагающей постоянство отношения γ.

§ 23. Скорость звука в газах

1. В механике (см. т. I, § 85) выводится следующая формула для скорости распространения звука в газах:

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}, \tag{23.1}$$

где ρ — плотность газа. Но давление P зависит не только от ρ, а также и от температуры T. Поэтому надо указать, в каком смысле понимается производная $dP/d\rho$. Ньютон считал, что давление связано с плотностью законом Бойля — Мариотта: $P/\rho = \text{const}$. Это соответствует предположению, что разности температур между сгущениями и разряжениями воздуха в звуковой волне мгновенно выравниваются, так что распространение звука есть изотермический процесс. Если верно это предположение, то под $dP/d\rho$ следует понимать частную производную $\left(\dfrac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T$. Тогда формула (23.1) перейдет в *формулу Ньютона*

$$c_N = \sqrt{\frac{P}{\rho}} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}, \tag{23.2}$$

где μ — молекулярный вес газа, а индекс N указывает, что c_N — скорость звука, вычисленная по формуле Ньютона. Полагая для воздуха $\mu = 28{,}8$, $T = 273$ К, получаем по формуле (23.2) $c_N = 280$ м/с, тогда как опыт дает $c = 330$ м/с.

2. Расхождение было устранено Лапласом (1749—1827). Он указал, что колебания плотности и связанные с ними колебания температуры в звуковой волне происходят настолько быстро, а теплопроводность воздуха настолько мала, что для таких процессов теплообмен не играет никакой роли. Разности температур между сгущениями и разрежениями воздуха в звуковой волне не успевают выравниваться, так что распространение звука можно считать адиабатическим процессом. В таком случае надо пользоваться не