ЗАДАЧА

Предполагая, что адиабатическая постоянная γ не зависит от температуры, обобщить формулу (22.1), не вводя предположения о малости разности давлений $P_1 - P_0$ и $P_1 - P_2$.

Ответ. $\gamma = \dfrac{\ln \dfrac{P_1}{P_0}}{\ln \dfrac{P_1}{P_2}}$.

При выводе формулы (22.1) использовалось уравнение адиабаты в дифференциальной форме (21.2), а потому формула справедлива не только в том случае, когда отношение γ постоянно, но и в тех случаях, когда оно меняется при изменении температуры. По этой причине мы и отдали предпочтение уравнению адиабаты в дифференциальной форме и не пользовались при выводе уравнением ее в интегральной форме (21.3), предполагающей постоянство отношения γ.

§ 23. Скорость звука в газах

1. В механике (см. т. I, § 85) выводится следующая формула для скорости распространения звука в газах:

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}, \tag{23.1}$$

где ρ — плотность газа. Но давление P зависит не только от ρ, а также и от температуры T. Поэтому надо указать, в каком смысле понимается производная $dP/d\rho$. Ньютон считал, что давление связано с плотностью законом Бойля — Мариотта: $P/\rho = \text{const}$. Это соответствует предположению, что разности температур между сгущениями и разряжениями воздуха в звуковой волне мгновенно выравниваются, так что распространение звука есть изотермический процесс. Если верно это предположение, то под $dP/d\rho$ следует понимать частную производную $\left(\dfrac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T$. Тогда формула (23.1) перейдет в *формулу Ньютона*

$$c_N = \sqrt{\frac{P}{\rho}} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}, \tag{23.2}$$

где μ — молекулярный вес газа, а индекс N указывает, что c_N — скорость звука, вычисленная по формуле Ньютона. Полагая для воздуха $\mu = 28{,}8$, $T = 273$ К, получаем по формуле (23.2) $c_N = 280$ м/с, тогда как опыт дает $c = 330$ м/с.

2. Расхождение было устранено Лапласом (1749—1827). Он указал, что колебания плотности и связанные с ними колебания температуры в звуковой волне происходят настолько быстро, а теплопроводность воздуха настолько мала, что для таких процессов теплообмен не играет никакой роли. Разности температур между сгущениями и разрежениями воздуха в звуковой волне не успевают выравниваться, так что распространение звука можно считать адиабатическим процессом. В таком случае надо пользоваться не уравнением изотермы, а уравнением адиабаты (21.2). Если в это уравнение вместо объема V ввести плотность $\rho \sim 1/V$, то оно перейдет в

$$\gamma P\,d\rho - \rho\,dP = 0, \tag{23.3}$$

откуда для адиабатического процесса

$$\frac{dP}{d\rho} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\text{ад}} = \gamma\,\frac{P}{\rho} = \gamma\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T. \tag{23.4}$$

Поэтому вместо формулы Ньютона (23.2) получается *формула Лапласа*

$$c_L = \sqrt{\gamma\,\frac{P}{\rho}} = c_N\sqrt{\gamma}. \tag{23.5}$$

Она даст для скорости звука величину в $\sqrt{\gamma}$ раз большую, чем формула Ньютона. Измерения γ для воздуха привели к результату $\gamma = 1{,}4$. Поэтому согласно формуле Лапласа при $T = 273$ К скорость звука в воздухе должна быть

$$c = 280\sqrt{1{,}4} = 330 \text{ м/с},$$

что находится в превосходном согласии с опытом.

3. На формулах Ньютона и Лапласа основан второй удобный метод экспериментального измерения отношения теплоемкостей γ, превосходящий по точности метод Клемана и Дезорма. Экспериментально измеряется скорость звука c в исследуемом газе. Величина γ вычисляется по формуле

$$\gamma = \left(\frac{c}{c_N}\right)^2, \tag{23.6}$$

где c_N — так называемая *ньютонова скорость звука*, т. е. величина, определяемая формулой (23.2). Величина же, определяемая формулой (23.5), называется *лапласовой скоростью звука*.

ЗАДАЧА

Показать, что соотношение (23.5) между скоростью звука, рассчитанной по формуле Лапласа (адиабатической) и Ньютона (изотермической), справедливо для любого физически однородного изотропного вещества.

Решение. Для адиабатического процесса $du + P dv = 0$, где u и v — удельные значения внутренней энергии и объема вещества. Взяв за независимые переменные P и v, получаем

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_{\text{ад}} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_P + P}{\left(\frac{\partial u}{\partial P}\right)_v}.$$

Если объем v поддерживается постоянным, то остается только одна независимая переменная, от которой зависят все остальные величины. Таковой является либо

P, либо T. Рассматривая $u(P)$ как сложную функцию $u[T(P)]$ и дифференцируя, получим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial P}\right)_v=\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_v,$$

или используя соотношения (8.4) и (18.3), —

$$\left(\frac{\partial u}{\partial P}\right)_v=-c_v\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T.$$

Поступая аналогично, находим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_P+P=\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P+P=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_P+P\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P\right]\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P=c_P\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P.$$

После соответствующей подстановки получим

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_{\text{ад}}=\frac{c_P}{c_v}\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T. \tag{23.7}$$

Соотношения (23.4) и (23.5) являются следствиями формулы (23.7), если ввести плотность $\rho=1/v$.

§ 24. Замечания относительно экспериментальных методов определения C_P и C_V для газов

Для идеальных газов значением величины $\gamma=C_P/C_V$ однозначно определяются их теплоемкости C_P и C_V, так как в случае идеальных газов эти теплоемкости связаны дополнительным соотношением

$$C_P-C_V=R. \tag{24.1}$$

Разрешая эти уравнения относительно C_P и C_V, находим

$$C_V=\frac{R}{\gamma-1},\quad C_P=\frac{\gamma R}{\gamma-1}. \tag{24.2}$$

Детальное описание методов измерения теплоемкостей газов C_P и C_V не входит в задачи нашего руководства. Поэтому ограничимся только одним замечанием. Непосредственное измерение на опыте величины C_V затруднительно, так как при постоянном V масса газа, а следовательно и его теплоемкость, всегда малы по сравнению с соответствующими величинами для калориметра. На опыте удобнее измерять величину C_P и адиабатическую постоянную γ, а теплоемкость C_V вычислять по формуле $C_V=\frac{1}{\gamma}C_P$.

Для измерения C_P исследуемый газ, нагретый до определенной температуры, заставляют протекать через спиральную металлическую трубку (змеевик), опущенную в воду калориметра (рис. 21). На одном конце змеевика поддерживаются постоянными давление P_1 и температура T_1 газа. На выходе змеевика поддерживается давление P_2 и измеряется температура газа T_2. Она ниже T_1, так как