Решение. Используя решение предыдущей задачи, находим

$$T_3=\frac{C_V T_2+P_1 V_2}{C_P}, \quad V_3=\frac{RT_3}{P_1}. \tag{29.3}$$

С помощью уравнения Клапейрона $PV=RT$ и соотношения Роберта Майера $C_P-C_V=R$ выражение для T_3 нетрудно преобразовать к виду

$$T_3=T_1+\frac{C_V}{C_P^2}\,\frac{V_1(P_2-P_1)^2}{P_2}. \tag{29.4}$$

Отсюда видно, что в результате обоих адиабатических процессов температура, а с ней и объем газа всегда возрастают. Если давление меняется бесконечно мало, то из (29.4) следует, что температура и объем меняются на бесконечно малые величины *второго порядка*. В первом порядке они остаются неизменными. Отсюда следует, что если адиабатически расширять газ, последовательно снимая с поршня бесконечно малые грузы, а затем снова положить эти грузы на поршень в обратном порядке, то температура и объем газа в конечном состоянии будут отличаться от их значений в исходном состоянии бесконечно мало. В пределе, когда величины последовательно снимаемых грузов стремятся к нулю, а их число к бесконечности, газ совершит конечный процесс, пройдя при сжатии в обратном порядке через ту же последовательность равновесных состояний, через которые он проходил при расширении.

§ 30. Цикл Карно и теорема Карно

1. Из различных круговых процессов особое значение в термодинамике имеет *круговой процесс* или *цикл Карно*. Это квазистатический процесс, в котором систему можно приводить в тепловой контакт с двумя тепловыми резервуарами, имеющими постоянные температуры T_1 и T_2. В дальнейшем предполагается, что $T_1>T_2$. Тепловой резервуар с более высокой температурой T_1 называется *нагревателем*, а с более низкой температурой T_2 — *холодильником*. Цикл Карно заключается в следующем. Сначала система, имея температуру T_1, приводится в тепловой контакт с нагревателем. Затем, бесконечно медленно уменьшая внешнее давление, ее заставляют квазистатически расширяться по изотерме *12* (рис. 25). При этом она заимствует тепло Q_1 от нагревателя и производит работу A_{12} против внешнего давления. После этого систему адиабатически изолируют и заставляют квазистатически расширяться по адиабате *23*, пока ее температура не достигнет температуры холодильника T_2. При адиабатическом расширении система также совершает некоторую работу A_{23} против внешнего давления. В состоянии *3* систему при-

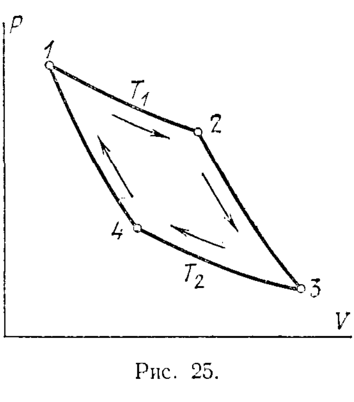

Рис. 25.

водят в тепловой контакт с холодильником и непрерывным увеличением давления изотермически сжимают ее до некоторого состояния *4*. При этом над системой производится работа (т. е. сама система совершает отрицательную работу A_{34}), и она отдает холодильнику некоторое количество тепла Q_2. Состояние *4* выбирается так, чтобы можно было квазистатическим сжатием по адиабате *41* вернуть систему в исходное состояние *1*. Для этого надо, разумеется, над системой совершить работу (т. е. сама система должна произвести отрицательную работу A_{41}). В результате кругового процесса Карно внутренняя энергия системы не изменится, а потому произведенная ею работа равна $A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 - Q_2$. Коэффициент полезного действия η цикла Карно определяется соотношением (28.4), из которого следует

$$Q_2 = (1 - \eta) Q_1. \tag{30.1}$$

2. Докажем знаменитую теорему Карно: *коэффициент полезного действия тепловой машины, работающей по циклу Карно, зависит только от температур T_1 и T_2 нагревателя и холодильника, но не зависит от устройства машины, а также от вида используемого рабочего вещества.*

Для доказательства рассмотрим две машины Карно, имеющие общий нагреватель при температуре T_1 и общий холодильник при температуре T_2. Пусть к. п. д. первой машины равен η, а второй η'. Допустим, что $\eta > \eta'$, и покажем, что это допущение приводит к противоречию с постулатом второго начала термодинамики. Цикл Карно — квазистатический, а потому он может совершаться как в прямом, так и в обратном направлении. Заставим первую машину пройти цикл в прямом направлении, т. е. производить работу. Пусть в результате m циклов она отберет от нагревателя тепло Q_1, передаст холодильнику тепло Q_2 и произведет работу $A = Q_1 - Q_2$, например, поднимет груз. Остановим после этого первую машину и используем потенциальную энергию поднятого груза, чтобы привести в действие вторую машину в обратном направлении. Вторая машина Карно будет, следовательно, работать как холодильная машина. Пусть в результате m' циклов она заберет тепло Q_2' от холодильника и передаст тепло Q_1' нагревателю; при этом над машиной будет совершена работа $A' = Q_1' - Q_2'$. Результат действия m циклов первой и m' циклов второй машины представится следующей схемой:

нагреватель отдал тепло $(Q_1 - Q_1')$;
холодильник отдал тепло $(Q_2' - Q_2)$;
машина совершила работу $A - A' =$

$$= (Q_1 - Q_2) - (Q_1' - Q_2') = \eta Q_1 - \eta' Q_1'.$$

Дальнейший ход доказательства зависит от того, какой постулат второго начала термодинамики положить в основу: постулат Томсона — Планка или постулат Клаузиуса. Если исходить из постулата Томсона — Планка, то доказательство следует вести так. Выберем целые числа m и m' так, чтобы $Q_1 - Q_1' = 0$. Этого всегда можно достигнуть. Действительно, $Q_1 = mq_1$, $Q_1' = m'q_1'$, где q_1 — количество тепла, полученное первой машиной от нагревателя в результате одного цикла, а q_1' — количество тепла, отданное тому же нагревателю второй машиной также в результате одного цикла. Если величины q_1 и q_1' соизмеримы, то всегда можно подобрать целые числа m и m' так, чтобы $mq_1 - m'q_1' = 0$, т. е. $Q_1 - Q_1' = 0$. Если же эти величины не соизмеримы, то целые числа m и m' можно выбрать настолько большими, чтобы это равенство выполнялось с какой угодно заранее заданной точностью. Поэтому физически всегда возможно выбрать целые числа m и m' так, чтобы $Q_1 - Q_1' = 0$. Тогда результат кругового процесса представится в следующем виде:

Состояние нагревателя не изменилось.

Холодильник отдал тепло $(Q_2' - Q_2) = (\eta - \eta')\, Q_1 > 0$.

Машина совершила работу $\eta Q_1 - \eta' Q_1' = (\eta - \eta')\, Q_1 > 0$.

Таким образом, единственным результатом кругового процесса будет производство работы $(\eta - \eta')\ Q_1 > 0$ за счет эквивалентного количества тепла, заимствованного от холодильника. Это процесс Томсона — Планка, возможность которого противоречит постулату второго начала термодинамики. Поэтому предположение $\eta > \eta'$ неверно. Точно так же неверно предположение $\eta' > \eta$. Чтобы убедиться в этом, надо заставить вторую машину пройти цикл Карно в прямом, а первую — в обратном направлении и повторить наше рассуждение. Следовательно, $\eta = \eta'$, и теорема Карно доказана.

3. Поучительно получить неравенство (37.2) из постулата Клаузиуса.

Если в основу доказательства положить постулат Клаузиуса, то рассуждение немного изменится. Выберем целые числа m и m' так, чтобы работа, выполненная обеими машинами, равнялась нулю: $\eta Q_1 - \eta' Q_1' = 0$. Тогда результат кругового процесса представится в виде:

нагреватель получил тепло $Q_1' - Q_1 = \dfrac{\eta - \eta'}{\eta'}\, Q_1 > 0$,

холодильник отдал тепло $Q_2' - Q_2 = (1 - \eta')\, Q_1' - (1 - \eta)\, Q_1 = Q_1' - Q_1 > 0$.

Никаких других изменений не произошло. Единственным результатом процесса получился переход тепла от тела менее нагретого к телу более нагретому. Это противоречит постулату Клаузиуса, что и доказывает теорему Карно.

§ 31. Термодинамическая шкала температур

1. В 1848 г. Вильям Томсон (лорд Кельвин) указал, что теоремой Карно можно воспользоваться для построения рациональной температурной шкалы, совершенно не зависящей от индивидуальных особенностей термометрического вещества и устройства термометра.