

Ввиду того, что разность $\Delta T = T - \tau$ является малой поправкой, в правой части последнего равенства температуру T в рамках принятой точности расчета можно заменить на τ . Тогда

$$B(\tau) = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{R\tau \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)}.$$

С той же точностью величину BT в левой части соотношения (33.4) можно заменить на $B\tau$. В результате получится

$$T = \left(\frac{A}{R} - \frac{B}{V_0} \right) \tau, \quad (33.5)$$

а для поправки ΔT

$$\Delta T \equiv T - \tau = \left(\frac{A - R}{R} - \frac{B}{V_0} \right) \tau. \quad (33.6)$$

Значения поправок ΔT для гелиевого термометра, вычисленные по формуле типа (33.6), приведены в табл. 2.

§ 34. Примеры на применение теоремы Карно

С помощью теоремы Карно можно получить много важных соотношений между физическими величинами, характеризующими систему в состоянии термодинамического равновесия. Для этого надо заставить систему надлежащим образом осуществить цикл Карно и применить к нему теорему Карно. Этот метод называется *методом циклов*. Поясним его на примере.

1 п р и м е р. Рассмотрим физически однородное тело, состояние которого характеризуется двумя параметрами, например, T и V . Внутренняя энергия такого тела есть однозначная функция тех же параметров: $U = U(T, V)$. Если известно термическое уравнение состояния $f(P, V, T) = 0$, то теорема Карно позволяет в общем виде решить вопрос о зависимости внутренней энергии U от объема. Этот вопрос мы и рассмотрим.

Будем изображать состояние тела точкой на диаграмме V, P . Рассмотрим в плоскости V, P семейство изотерм и семейство адиабат. Они разбивают эту плоскость на клетки, имеющие форму криволинейных четырехугольников (рис. 27, а). Если изотермы и адиабаты провести достаточно густо, то клетки будут сколь угодно мало отличаться от параллелограммов. Возьмем один из таких бесконечно малых параллелограммов 1234 , изображенный на рисунке 27, б в увеличенном масштабе. Цикл 1234 есть цикл Карно. Обозначим абсолютную температуру на изотерме 12 через T_1 , а на изотерме 34 — через T_2 . Так как эти температуры бесконечно мало отличаются друг от друга, то индексы 1 и 2 будем опускать во всех соотношениях, в которые T_1 и T_2 входят в виде множителей при бесконечно малых величинах. То же относится и к другим величинам, например P_1, P_2, V_1, V_2 и т. п. Работа A , произведенная системой в результате цикла 1234 , численно равна площади параллелограмма 1234 . Чтобы вычислить ее, проведем прямые

16 и 25, параллельные оси давлений. Ясно, что искомая площадь равна площади параллелограмма 1256. Высота этого параллелограмма численно равна приращению $V_2 - V_1$ объема при изотермическом процессе 12. Основание же 61 дает приращение давления при повышении температуры на $T_1 - T_2$, когда объем системы поддерживается постоянным. Оно равно $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V(T_1 - T_2)$. Для работы цикла, которая численно равна его площади, получаем

$$A = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V(T_1 - T_2)(V_2 - V_1).$$

Вычислим теперь количество тепла Q_1 , отданное нагревателем на изотерме 12. По первому началу $Q_1 = U_2 - U_1 + P(V_2 - V_1)$.

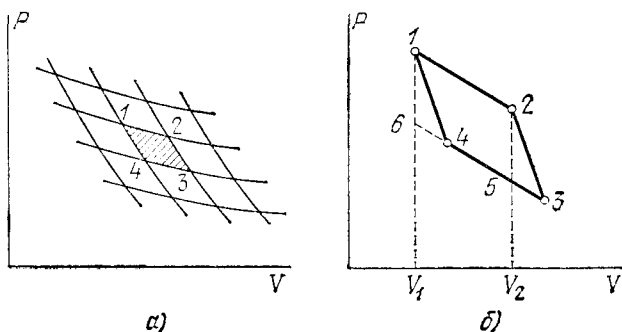


Рис. 27.

Так как на изотерме 12 температура постоянна, то $U_2 - U_1 = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T(V_2 - V_1)$, что дает

$$Q_1 = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right](V_2 - V_1).$$

По теореме Карно

$$\frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (34.1)$$

Подставляя сюда значения A и Q_1 , найденные выше, получим

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P. \quad (34.2)$$

Эта формула и решает поставленную задачу.

2 п р и м е р. Формулу, аналогичную формуле (34.2), можно вывести и для энтальпии. Энтальпию I будем рассматривать как функцию температуры T и давления P . Преобразуем выражения для количества тепла Q_1 и работы A . Очевидно

$$dI = d(U + PV) = (dU + PdV) + VdP,$$

откуда на основании первого начала

$$dI = \delta Q + VdP,$$

или
$$\delta Q = dI - VdP. \quad (34.3)$$

Соотношение (34.3) также выражает первое начало термодинамики, но в иной форме. Пользуясь им, для тепла Q_1 получаем

$$Q_1 = I_2 - I_1 - V(P_2 - P_1).$$

Так как на изотерме I_2 температура постоянна, то $I_2 - I_1 = \left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T (P_2 - P_1)$. Таким образом,

$$Q_1 = \left[\left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T - V\right] (P_2 - P_1).$$

Преобразуем теперь выражение для работы A . С этой целью воспользуемся тождеством (8.3):

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T,$$

а также соотношением

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T (V_2 - V_1) = P_2 - P_1.$$

Тогда получим
$$A = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P (T_1 - T_2) (P_2 - P_1).$$

Подставляя величины Q_1 и A в формулу (34.1), находим искомое соотношение:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + V. \quad (34.4)$$

Применим уравнение (34.2) к идеальному газу. В этом случае $P = \frac{RT}{V}$, и следовательно,

$$T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{RT}{V} = P.$$

После подстановки этих значений в формулу (34.2) получаем

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0. \quad (34.5)$$

Отсюда следует, что внутренняя энергия идеального газа не зависит от объема, а является функцией только температуры. Это — закон Джоуля, который использовался нами ранее как эмпирический факт. Мы видим, что он является следствием уравнения Клапейрона и второго начала термодинамики. Далее, из соотношения $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ получаем

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial U}{\partial V} = 0. \quad (34.6)$$

Значит, теплоемкость C_V идеального газа не зависит от объема, а может зависеть только от температуры.

Аналогичные соотношения получаются из уравнения (34.4). Именно,

$$\left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T = 0, \quad (34.7)$$

$$\left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T = 0. \quad (34.8)$$

Отсюда видно, что энтальпия идеального газа и его теплоемкость C_P являются функциями одной только температуры.

З п р и м е р. Уравнение (34.2) можно обобщить на случай произвольной термодинамической системы, состояние которой определяется заданием каких-то внешних параметров a_1, a_2, \dots, a_n и температуры T . В этом случае элементарная работа представляется выражением

$$\delta A = A_1 da_1 + \dots + A_n da_n,$$

причем величины $A_i(a_1, a_2, \dots, a_n, T)$ играют роль обобщенных сил. Если $(n - 1)$ параметров a_i , за исключением одного a_i , поддерживать постоянными, то останется только один свободный параметр a_i . Тогда можно без всяких изменений повторить рассуждения, приведшие нас к формуле (34.2). Роль объема V будет играть параметр a_i , роль давления — обобщенная сила A_i . В результате получится

$$\frac{\partial U}{\partial a_i} = T \left(\frac{\partial A_i}{\partial T}\right)_a - A_i. \quad (34.9)$$

Аналогично можно обобщить формулу (34.4). Если ввести обозначения

$$I = U + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots + A_n a_n, \quad (34.10)$$

то получится

$$\frac{\partial I}{\partial A_i} = a_i - T \left(\frac{\partial a_i}{\partial T}\right)_A. \quad (34.11)$$

Формулы (34.9) и (34.11) имеют многочисленные применения.

§ 35. Разность между теплоемкостями C_P и C_V

1. В § 18 из первого начала термодинамики была выведена формула

$$C_P - C_V = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right] \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P. \quad (35.1)$$

Чтобы по этой формуле вычислить $C_P - C_V$, надо знать термическое и калорическое уравнения состояния. Второе начало термодинамики позволяет решить ту же задачу без использования калорического уравнения состояния. Оно приводит к формуле (34.2),