Выразив δQ_2 через δQ_1 по формуле (37.4) и учтя, что $T_2 = T_{20} = \text{const}$, получим

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta Q_1 - \frac{T_{20}}{T_1}\,\delta Q_1 = -C_1 dT_1 + C_1 T_{20}\,\frac{dT_1}{T_1}, \\ A &= C_1\left(T_{10} - T_{20} - T_{20}\ln\frac{T_{10}}{T_{20}}\right). \end{aligned} \tag{37.8}$$

Работа A меньше убыли внутренней энергии нагретого тела $C_1(T_{10} - T_{20})$. Часть внутренней энергии тело передает окружающей среде в виде тепла (ср. § 48).

§ 38. Неравенство Клаузиуса в общем виде

1. Обобщим теперь неравенство (37.2) на случай произвольного числа тепловых резервуаров $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Резервуары должны быть достаточно велики (в пределе бесконечно велики), чтобы в ходе теплообмена их температуры $T_1, T_2, \ldots, T_n$ оставались практически постоянными. Пусть какая-либо термодинамическая система (назовем ее по-прежнему системой I) совершила произвольный круговой процесс — обратимый или необратимый, в ходе которого она заимствовала от тепловых резервуаров теплоты $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ и за их счет произвела эквивалентную работу $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$ (рис. 28).

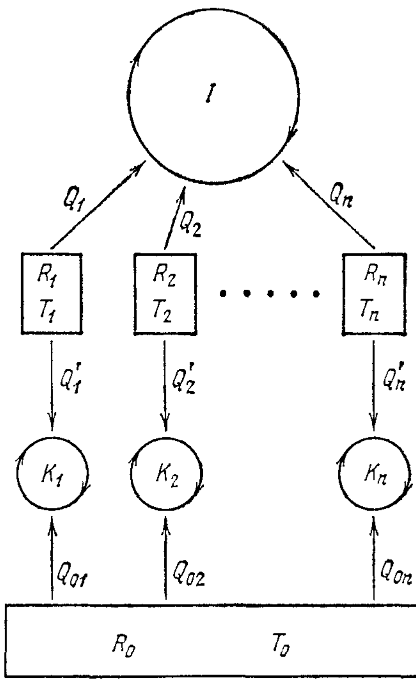

Рис. 28.

После того как указанный круговой процесс закончился, теплоизолируем систему I. Возьмем вспомогательный тепловой резервуар R_0 настолько большой, что в процессе теплообмена его температура T_0 практически не меняется. Возьмем, кроме того, n идеальных машин Карно и включим их между вспомогательным резервуаром R_0 и резервуарами $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Таким образом, i-я машина будет совершать цикл Карно между резервуарами R_0 и R_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Не имеет значения, совершаются ли все эти n циклов Карно одновременно, последовательно, или с произвольным наложением друг на друга. Пусть в результате своего цикла i-я машина Карно забирает от резервуара R_0

тепло Q_0, а от резервуара R_i — тепло Q'_i. На основании теоремы Карно и определения абсолютной температуры

$$\frac{Q_{0i}}{T_0}+\frac{Q'_i}{T_i}=0. \tag{38.1}$$

Суммируя по i, находим общее количество тепла Q_0, отданное вспомогательным резервуаром:

$$Q_0=\sum Q_{0i}=-T_0\sum_{i=1}^{n}\frac{Q'_i}{T_i}.$$

Все n циклов Карно можно объединить с круговым процессом, ранее совершенным системой I, в один сложный круговой процесс. В результате такого процесса

$$\begin{array}{l}\text{резервуар } R_0 \text{ отдал тепло } Q_0;\\ \text{резервуар } R_1 \text{ отдал тепло } Q_1+Q'_1;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \text{резервуар } R_n \text{ отдал тепло } Q_n+Q'_n;\\ \text{совершена работа } A=Q_0+(Q_1+Q'_1)+\ldots+(Q_n+Q'_n).\end{array} \tag{38.2}$$

Дальнейшие рассуждения построим на постулате Томсона — Планка. Выберем величины Q'_1, Q'_2, ... так, чтобы $(Q_1+Q'_1)=\ldots=(Q_n+Q'_n)=0$. Это всегда возможно, так как тепловые резервуары R_1, R_2, ..., R_n предполагаются достаточно большими. В результате все тепловые резервуары вернутся в свои исходные состояния. Вспомогательный резервуар R_0 отдаст тепло

$$Q_0=T_0\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{T_i}. \tag{38.3}$$

Получился круговой процесс, совершенный системой I и n машинами Карно, в результате которого

резервуар R_0 отдал тепло Q_0,

совершена эквивалентная работа $A=Q_0$.

Больше никаких изменений не произошло. Произведенная работа $A=Q_0$ не может быть положительной, так как в противоположном случае получилось бы противоречие с постулатом Томсона — Планка. Таким образом, должно быть $Q_0\leqslant 0$, или, учитывая (38.3) и положительность абсолютной температуры T_0,

$$\bigcirc\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{T_i}\leqslant 0. \tag{38.4}$$

Это неравенство мы и хотели доказать. Кружок у знака суммы означает, что соотношение (38.4) относится к круговому процессу. Имеется в виду круговой процесс, выполненный самой системой I. Вспомогательные приспособления — машины Карно и тепловой резервуар R_0 — использовались только для доказательства. Их наличие никак не может отразиться на справедливости соотношения (38.4). Это ясно хотя бы уже из того, что вспомогательные приспособления были привлечены только после того, как произошел круговой процесс, к которому относятся величины Q_i и T_i.

2. При доказательстве предполагалось, что каждый из тепловых резервуаров R_i может обмениваться теплом только с рассматриваемой системой I. Обмен теплом между самими тепловыми резервуарами, а также между резервуарами и остальными телами не учитывался. Но такого рода теплообмен не играет роли. Неравенство (38.4) останется справедливым и при его наличии. Действительно, всегда можно ввести адиабатические перегородки, исключающие указанный теплообмен и в то же время не меняющие физическое состояние тепловых резервуаров и не влияющие на их теплообмен с рассматриваемой системой.

3. Далее, доказательство предполагало, что тепловые резервуары R_1, R_2, ..., R_n достаточно велики. Такое предположение необходимо, чтобы температуры T_i могли считаться постоянными, каковы бы ни были количества тепла, получаемые или отдаваемые тепловыми резервуарами. Общий случай, когда резервуары конечны, а их температуры произвольно меняются во времени, сводится к разобранному частному случаю. Действительно, пусть температура T_i резервуара R_i меняется во времени. Процесс теплообмена, в результате которого резервуар R_i отдает системе I тепло Q_i, можно разбить на сколь угодно большое число N бесконечно малых процессов, в которых резервуар R_i отдает бесконечно малые количества тепла δQ_{i1}, ..., δQ_{iN}. В каждом из таких процессов температуру резервуара R_i можно считать постоянной. А это означает, что по отношению к этим процессам резервуар R_i ведет себя как бесконечно большой. Один резервуар R_i с переменной температурой как бы эквивалентен N последовательно включаемым резервуарам с постоянными, но разными температурами; в течение короткого времени первый резервуар отдает системе I тепло δQ_{i1}, а в остальное время кругового процесса он теплоизолирован; в течение следующего короткого времени второй резервуар отдает тепло δQ_{i2}, оставаясь теплоизолированным в остальное время, и т. д. Ясно поэтому, что в общем случае неравенство (38.4) следует записать в виде

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leqslant 0. \tag{38.5}$$

Это фундаментальное соотношение называется *неравенством Клаузиуса*.

4. При окончательной формулировке неравенства (38.5) нет необходимости вводить какие-то тепловые резервуары $R_1, R_2, \ldots, R_n$, с которыми система I обменивается теплом. Лучше пользоваться представлением о теплообмене между системой I и *окружающей средой*. Тогда величина T будет означать *температуру этой среды* и может меняться как в пространстве, так и во времени. Надо мысленно представить себе, что окружающая среда разделена на малые области, каждая из которых характеризуется определенной, вообще говоря, переменной температурой. Символ δQ означает бесконечно малое количество тепла, переданное системе I одной или несколькими из таких областей при температуре T. Кружок у знака интеграла должен напоминать, что неравенство (38.5) относится к круговому процессу, совершенному рассматриваемой системой I.

5. Отметим еще, почему при доказательстве был введен вспомогательный тепловой резервуар R_0. Это было сделано для того, чтобы иметь в распоряжении неограниченный источник внутренней энергии, из которого можно было бы черпать или которому можно было бы передавать ничем не ограниченное количество тепла. Если бы один из тепловых резервуаров $R_1, R_2, \ldots$, например первый, обладал неограниченным запасом внутренней энергии, то надобности во вспомогательном резервуаре R_0 не было бы. Его функции можно было бы возложить на резервуар R_1. Поскольку в общем случае дело обстоит не так, то и потребовался резервуар R_0. Таким образом, для доказательства существенно, чтобы резервуар R_0 был бесконечно большим. Выбор резервуара R_0 не может сказаться на окончательном результате, в который резервуар R_0 не входит вообще.

6. Применим неравенство (38.5) к уточнению вопроса о верхнем пределе коэффициента полезного действия тепловых машин, который уже разбирался в конце предыдущего параграфа. Как и там, удобно вернуться к прежнему правилу знаков. Элементарное количество тепла условимся обозначать символом δQ_1, если машина его получает. Элементарное же количество тепла, отдаваемое машиной, будем обозначать символом δQ_2. Таким образом, по определению величины δQ_1 и δQ_2 существенно положительны. В этих обозначениях неравенство Клаузиуса запишется в виде

$$\int \frac{\delta Q_1}{T_1} - \int \frac{\delta Q_2}{T_2} \leqslant 0.$$

Здесь T_1 — температура той части окружающей среды, от которой машина получает тепло δQ_1 — эта часть среды играет роль нагревателя. Величина T_2 есть температура «холодильника», т. е. части окружающей среды, которой машина отдает тепло δQ_2. В отличие от случая, разобранного в предыдущем параграфе, теперь предполагается, что температуры нагревателя и холодильника не остаются постоянными, а меняются в ходе процесса. Пусть $T_{1\text{макс}}$ и $T_{2\text{мин}}$ означают соответственно максимальную температуру нагревателя и минимальную температуру холодильника. Предыдущее неравенство будет только усилено, если величины T_1 и T_2 заменить на $T_{1\text{макс}}$ и $T_{2\text{мин}}$.

Следовательно,

$$\int \frac{\delta Q_1}{T_{1\,\text{макс}}} - \int \frac{\delta Q_2}{T_{2\,\text{мин}}} \leqslant 0.$$

Отсюда

$$\frac{Q_1}{T_{1\,\text{макс}}} - \frac{Q_2}{T_{2\,\text{мин}}} \leqslant 0,$$

где Q_1 — полное тепло, полученное машиной от нагревателя за время кругового процесса, а Q_2 — полное тепло, отданное холодильнику. Переписав последнее неравенство в виде

$$-\frac{Q_2}{Q_1} \leqslant \frac{T_{2\,\text{мин}}}{T_{1\,\text{макс}}},$$

а затем прибавив к обеим частям по единице, получим

$$\eta \equiv \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leqslant \frac{T_{1\,\text{макс}} - T_{2\,\text{мин}}}{T_{1\,\text{макс}}}. \tag{38.6}$$

Этим неравенством и определяется верхний предел для коэффициента полезного действия тепловой машины η.

ЗАДАЧА

Доказать неравенство Клаузиуса с помощью постулата Клаузиуса.

Доказательство. До соотношений (38.2) включительно рассуждения остаются прежними, а дальше должны быть изменены следующим образом. Наложим дополнительные условия $Q_2 + Q_2' = \ldots = Q_n + Q_n' = 0$ и $A = Q_0 + (Q_1 + Q_1') + \ldots + (Q_n + Q_n') = 0$, или $Q_0 = -(Q_1 + Q_1')$. Тогда получится круговой процесс, в результате которого

резервуар R_0 отдал тепло Q_0;

резервуар R_1 получил тепло $-(Q_1 + Q_1') = Q_0$.

Никаких других изменений не произошло. Найдем сначала переданное тепло Q_0. При $i = 1$ из соотношений (38.1) получаем

$$\frac{Q_{01}}{T_0} = \frac{Q_0 + Q_1}{T_1},$$

а при $i = 2, 3, \ldots, n$

$$\frac{Q_{0i}}{T_0} = \frac{Q_i}{T_i}.$$

Складывая эти равенства, находим

$$\frac{Q_0}{T_0} = \frac{Q_0}{T_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i}.$$

Отсюда

$$Q_0 = \frac{T_0 T_1}{T_1 - T_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i}.$$

Если $T_0 > T_1$, то должно быть $Q_0 \geqslant 0$. Если же $T_0 < T_1$, то наоборот, $Q_0 \leqslant 0$. Иначе получилось бы противоречие с постулатом Клаузиуса. В обоих случаях мы приходим к неравенству (38.4).