ГЛАВА IV

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

* *

§ 52. Уравнение теплопроводности

1. В этой главе будут рассмотрены элементы *математической теории теплопроводности.* Основы этой теории были заложены французским математиком Фурье (1768—1830) в первой четверти 19 века. Естественно, что Фурье исходил из представлений теории теплорода, которой тогда пытались объяснить все тепловые явления. Эти представления неверны. Но мы видели (см. § 16), что, если объем системы или давление поддерживаются постоянными, то явления протекают так, как если бы тепло было каким-то веществом, которое может только перемещаться в пространстве, но не может создаваться или уничтожаться. Если постоянен объем системы, то количество тепла следует отождествить с внутренней энергией, а если постоянно давление, то — с энтальпией системы. В обоих случаях математические основы теории теплопередачи Фурье остаются верными, хотя их физическое обоснование не имеет ничего общего с представлениями, из которых исходил сам Фурье.

В дальнейшем предполагается, что передача тепла осуществляется исключительно путем теплообмена. Предполагается, что конвекции нет. В твердых телах это осуществляется само собой. В жидкостях же и газах надо позаботиться, чтобы конвекция была устранена, например, нагревать эти тела сверху. Точно так же предполагается, что потерями тепла на лучеиспускание можно пренебречь. Кроме того, будем предполагать, что объем системы остается постоянным, так что никаких перемещений вещества в процессе передачи тепла не возникает. Ограничимся, наконец, рассмотрением только одномерных задач, когда температура тела, помимо времени, зависит только от одной пространственной координаты.

2. В математической теории теплопроводности распространение тепла рассматривается подобно течению жидкости. *Плотностью потока тепла называется вектор* $\boldsymbol{j}$, *совпадающий по направлению с направлением распространения тепла и численно равный количеству тепла, проходящему в одну секунду через площадку в один квадратный сантиметр, перпендикулярную к направлению потока тепла.* Найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет вектор $\boldsymbol{j}$ в одномерных задачах.

Пусть имеется неограниченная среда, в которой происходит поток тепла в направлении, параллельном оси X. В общем случае свойства среды могут меняться в том же направлении. Кроме того, они могут меняться во времени. Поэтому плотность потока тепла $\boldsymbol{j}$ следует рассматривать как функцию координаты x и времени t: $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}(x,t)$. Выделим мысленно в среде бесконечно длинную призму или цилиндр с образующими, параллельными оси X, и рассмотрим бесконечно малый участок такого цилиндра AB с длиной dx (рис. 40). Пусть S — площадь поперечного сечения цилиндра. Количество тепла, вступающее в цилиндр AB за время dt через основание A с координатой x, равно $j(x)\,S\,dt$. Количество тепла, уходящее за то же время через основание B, будет $j(x+dx)\,S\,dt$. Так как через боковую поверхность цилиндра тепло не поступает, то полное количество тепла, вступающее за время dt в рассматриваемый участок цилиндра, равно

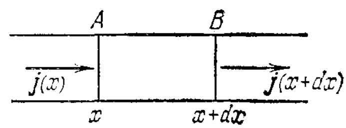

Рис. 40.

$$[j(x) - j(x+dx)]\,S\,dt = -\frac{\partial j}{\partial x}\,S\,dx\,dt.$$

Но это тепло можно представить в виде $dM \cdot c_v dT$, где $dM = \rho S\,dx$ — масса цилиндра AB, c_v — удельная теплоемкость, dT — повышение температуры. Приравнивая оба выражения и производя сокращение, получим

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}. \tag{52.1}$$

3. Теперь надо установить связь между плотностью потока тепла и температурой среды T. Опыт показывает, что поток тепла имеет место только тогда, когда температура среды меняется от точки к точке. Тепло течет всегда в направлении от высшей температуры к низшей. Простейшим является случай бесконечной однородной пластинки толщины l. Если на одной стороне пластинки поддерживается температура T_1, а на другой — температура T_2, причем $T_1 > T_2$, то опыт показывает, что *поток тепла пропорционален разности температур $T_1 - T_2$ и обратно пропорционален толщине пластинки l*. Математически это можно представить в виде

$$j = \varkappa \frac{T_1 - T_2}{l}, \tag{52.2}$$

где $\varkappa$ — положительная постоянная, зависящая только от материала пластинки и его физического состояния. Эта постоянная называется *коэффициентом теплопроводности*.

Допустим, что пластинка бесконечно тонкая. Если ось X направлена в сторону понижения температуры, то $l = dx$, $T_1 = T(x)$, $T_2 = T(x+dx)$,

$$\frac{T_2 - T_1}{l} = \frac{T(x+dx) - T(x)}{dx} = \frac{\partial T}{\partial x},$$

и формула (52.1) переходит в

$$j = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial x}. \tag{52.3}$$

Выражение (52.3) остается верным и в том случае, когда ось X направлена в сторону повышения температуры, так как в этом случае $l = -dx$, $T_1 = T(x + dx)$, $T_2 = T(x)$. Оно также справедливо и в общем случае неоднородной среды с совершенно произвольным распределением температуры, и притом не только слоистой среды, но и такой, свойства и температура которой являются функциями всех трех пространственных координат x, y, z. Достаточно в рассматриваемой точке пространства направить ось X в сторону максимального понижения или повышения температуры и рассмотреть бесконечно тонкий слой, перпендикулярный к этому направлению. Такой слой может считаться однородным, и к нему применима формула (52.3). Коэффициент теплопроводности $\varkappa$ будет функцией всех трех пространственных координат x, y, z. В нашей одномерной задаче он будет зависеть только от одной пространственной координаты x: $\varkappa = \varkappa(x)$.

Если выражение (52.3) подставить в формулу (52.1), то получится

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa \frac{\partial T}{\partial x}\right). \tag{52.4}$$

Это уравнение называется *уравнением теплопроводности*. В частном случае, когда среда однородна и коэффициент $\varkappa$ не зависит от температуры, оно принимает вид

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{52.5}$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{52.6}$$

где введено обозначение

$$\chi = \frac{\varkappa}{\rho c_v}. \tag{52.7}$$

Постоянная χ называется *коэффициентом температуропроводности среды*.

В среде могут оказаться *источники тепла*. Например, тепло может выделяться в результате прохождения электрического тока или радиоактивного распада. Такие источники мы не принимали во внимание. Чтобы их учесть, введем величину q, равную количеству тепла, выделяемому источниками в единице объема среды в одну секунду. Тогда вместо уравнения (52.1) следует писать

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} + q. \tag{52.8}$$

В соответствии с этим изменятся и остальные уравнения.

4. В общем случае, когда свойства и температура среды зависят от всех трех пространственных координат x, y, z, уравнение теплопроводности, выражающее баланс тепла в теле, имеет вид

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right) + q. \tag{52.9}$$

Однако решения такого уравнения аналитически можно получить только в простейших случаях. Наиболее важными являются случаи, когда среда и распределение температуры в ней обладают *сферической* или *цилиндрической симметрией*. Поэтому мы не будем выводить уравнение (52.9), а ограничимся случаями сферической и цилиндрической симметрии. В этих случаях, вместо прямоугольной системы координат, более удобными являются *сферическая и цилиндрическая координатные системы*.

Рассмотрим сначала случай сферической симметрии. Вектор плотности потока тепла $\vec{j}$ направлен вдоль радиуса, причем величина j, помимо времени, зависит только от r. Опишем вокруг центра симметрии две концентрические сферы с радиусами r и $r + dr$ (рис. 41). Количество тепла, вступающее за время dt в пространство между этими сферами через первую из них, равно $j\,(r)\cdot 4\pi r^2 dt$. Количество тепла, вытекающее за то же время через вторую сферу, будет $j\,(r + dr)\cdot 4\pi\,(r + dr)^2 dt$. Эти два количества удобно писать в виде $4\pi\,(jr^2)_r dt$ и $4\pi\,(jr^2)_{r+dr} dt$, чтобы подчеркиуть, что речь идет об одной и той же функции jr^2, но при разных значениях аргумента: r и $r + dr$. Разность между ними

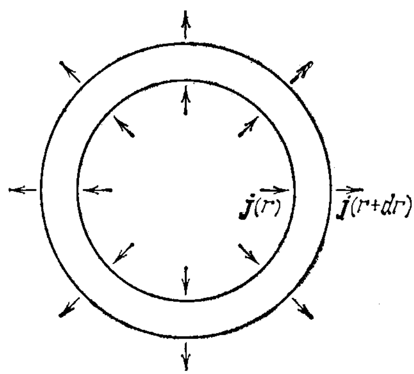

Рис. 41.

$$4\pi\,[(jr^2)_r - (jr^2)_{r+dr}]\,dt = -4\pi \frac{\partial}{\partial r}(r^2 j)\,dr\,dt$$

дает количество тепла, втекающее за время dt в рассматриваемый сферический слой из окружающего пространства. При наличии источников сюда надо добавить количество тепла

$$4\pi q r^2\,dr\,dt,$$

поставляемое источниками. Но изменение количества тепла в слое можно представить в виде $\rho \cdot 4\pi r^2 dr \cdot c_v dT$. Поэтому уравнение баланса тепла будет

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 j) + q. \tag{52.10}$$

Вместо соотношения (52.3) следует писать $j=-\varkappa\frac{\partial T}{\partial r}$, так что

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varkappa r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+q. \qquad (52.11)$$

Аналогичные рассуждения проводятся и в случае цилиндрической симметрии. Понимая теперь под r расстояние до оси симметрии, получим

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rj)+q, \qquad (52.12)$$

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varkappa r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+q. \qquad (52.13)$$

5. К уравнению теплопроводности надо добавить общее соотношение, которое должно выполняться на границе раздела двух произвольных сред. Это *граничное условие* состоит в том, что по обе стороны указанной границы должны быть одинаковые нормальные составляющие вектора $\boldsymbol{j}$. Действительно, пусть AB — граница раздела сред, а $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к ней, проведенный например, от первой среды ко второй (рис. 42). Вырежем мысленно бесконечно малый цилиндр с образующими, перпендикулярными к границе раздела, и основаниями по разные стороны от нее. Высота цилиндра h должна быть бесконечно малой высшего порядка по сравнению с линейными размерами оснований. Тогда потоком тепла через боковую поверхность цилиндра можно пренебречь. Если S — площадь основания цилиндра, то количество тепла, вступающее в него в 1 секунду, будет равно

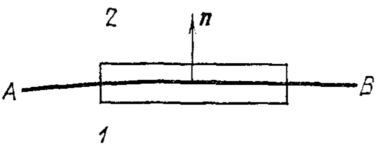

Рис. 42.

$$[j_n^{(1)}-j_n^{(2)}]\,S.$$

Но эта величина, как и количество тепла, содержащееся в цилиндре, должна быть пропорциональна его объему Sh, т. е. в пределе при $h\to 0$ должна обращаться в нуль. Таким образом, в пределе, когда оба основания цилиндра сливаются друг с другом на границе AB, должно быть

$$j_n^{(1)}=j_n^{(2)}. \qquad (52.14)$$

Это значит, что *на любой границе нормальная составляющая вектора потока тепла непрерывна*. Доказательство предполагает, что на границе раздела сред нет источников тепла с конечной поверхностной плотностью. При наличии таковых нормальная составляющая вектора $\boldsymbol{j}$ может претерпевать разрыв.