§ 53. Простейшие стационарные задачи на теплопроводность

Все задачи на теплопроводность могут быть разделены на *стационарные* и *нестационарные*. *Стационарными называются такие задачи, в которых температура T не меняется во времени*. Она является функцией только пространственных координат. В этом случае $\partial T/\partial t = 0$. В одномерных задачах T зависит только от одной пространственной координаты, так что отпадает надобность в символе для частных производных. Рассмотрим простейшие стационарные одномерные задачи.

1. Стационарное распределение температуры в бесконечной плоскопараллельной пластинке. Допустим, что имеется бесконечная пластинка толщины l, поверхности которой поддерживаются при постоянных температурах T_1 и T_2. Требуется найти распределение температуры T внутри такой пластинки. Примем за ось X прямую, перпендикулярную к пластинке. Начало координат поместим на плоскости 1, ограничивающей пластинку. Коэффициент теплопроводности $\varkappa$ может зависеть от координаты x. Уравнение (52.4) переходит в

$$\frac{d}{dx}\left(\varkappa\frac{dT}{dx}\right)=0.$$

Из него следует, что $\varkappa\, dT/dx = \mathrm{const}$, или, ввиду (52.3), $j = \mathrm{const}$. Постоянство плотности потока тепла справедливо независимо от того, однородна пластинка или нет. Рассмотрим теперь простейший случай *однородной пластинки*. В этом случае коэффициент $\varkappa$ постоянен, а потому $dT/dx = \mathrm{const}$. Обозначая постоянную буквой A и интегрируя, получим

$$T = Ax + B,$$

где B — вторая постоянная интегрирования. Температура поперек пластинки меняется с координатой x по линейному закону. Постоянные A и B совершенно не зависят от коэффициента теплопроводности. Они определяются из граничных условий. При $x = 0$ должно быть $T = T_1$, а при $x = l$ $T = T_2$. Это приводит к системе уравнений

$$T_1 = B, \quad T_2 = Al + B.$$

Определив из нее постоянные A и B, найдем распределение температуры:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{l}\,x + T_1. \tag{53.1}$$

2. Стационарное распределение температуры между двумя концентрическими сферами. Обозначим радиус внутренней сферы r_1, а внешней — r_2. Пространство между сферами заполнено средой, коэффициент теплопроводности которой может зависеть от r. Из

(52.11) следует, что при отсутствии в среде источников тепла распределение температуры описывается уравнением

$$\frac{d}{dr}\left(\varkappa r^2 \frac{dT}{dr}\right) = 0.$$

Оно дает $\varkappa r^2 dT/dr = \mathrm{const}$. Таким образом, *плотность потока тепла* $j = -\varkappa\, dT/dr$ *меняется обратно пропорционально квадрату расстояния* r. Так и должно быть, так как поток тепла через сферу радиуса r равен $4\pi r^2 j$, а этот поток должен быть одним и тем же для всех сфер. Допустим теперь, что среда между сферами *однородна*. Тогда коэффициент $\varkappa$ будет постоянен, а потому $r^2\, dT/dr = \mathrm{const}$. Обозначая постоянную — A, получим $dT/dr = -A/r^2$, или после интегрирования

$$T = \frac{A}{r} + B.$$

Постоянные интегрирования A и B определятся из значений, которые принимает температура T на границах сферического слоя. Это приводит к системе уравнений:

$$T_1 = \frac{A}{r_1} + B, \quad T_2 = \frac{A}{r_2} + B.$$

Определив из нее постоянные A и B, находим распределение температуры между сферами:

$$T = \frac{r_2 T_2 - r_1 T_1}{r_2 - r_1} + \frac{r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{r_2 - r_1}\frac{1}{r}. \tag{53.2}$$

3. **Стационарное распределение температуры между двумя концентрическими бесконечно длинными цилиндрами.** Радиус внутреннего цилиндра обозначим r_1, внешнего — r_2. Температуры их поддерживаются при постоянных значениях T_1 и T_2. Стационарное распределение температуры между цилиндрами находится так же, как и в предыдущем случае. Если среда между цилиндрами *однородна*, то получается

$$T = \frac{T_1 \ln r_2 - T_2 \ln r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} + \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln r. \tag{53.3}$$

ЗАДАЧИ

1. Урановый шар радиуса $R = 10$ см, помещенный в сосуд с водой, облучается равномерным потоком нейтронов. В результате реакций деления ядер урана в шаре выделяется энергия $q = 100$ Вт/см^3. Температура воды $T = 373$ К, теплопроводность урана $\varkappa = 400$ Вт/(м·К·с). Найти стационарное распределение температуры в шаре, а также температуру в его центре.

Решение. В стационарном случае $\partial T/\partial t = 0$. В этом случае после однократного интегрирования уравнения (52.11) ($q = \mathrm{const}$) получим

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{q}{3\varkappa} r + \frac{C}{r^2}.$$

Постоянная интегрирования C должна равняться нулю, так как в противном случае в центре шара мы получили бы бесконечное значение для производной dT/dr. Интегрируя вторично с учетом граничного условия $T = T_0$ при $r = R$, найдем

$$T = T_0 + \frac{q}{6\varkappa}(R^2 - r^2).$$

Температура в центре шара

$$T_C = T_0 + \frac{qR^2}{6\varkappa} = 790\ \text{К}.$$

2. По однородному цилиндрическому проводу без изоляции течет постоянный электрический ток. Определить стационарное распределение температуры в проводе, если его поверхность поддерживается при постоянной температуре T_0.

Ответ. $T = T_0 + \frac{I^2\rho}{4\pi^2 R^4 \varkappa}(R^2 - r^2)$, где I — сила тока, ρ — удельное сопротивление провода, R — радиус провода, r — расстояние до его оси. Все величины выражаются в единицах системы СГС.

§ 54. Нестационарные задачи. Теорема единственности

1. Будем предполагать, что среда, в которой распространяется тепло, *однородна*, т. е. все параметры среды $\varkappa$, ρ, c_v не зависят от координат. Будем считать также, что они не зависят от времени и температуры, т. е. являются *постоянными*. Когда температура T зависит только от одной пространственной координаты x и времени, уравнение теплопроводности при наличии источников тепла имеет вид (52.8), или с учетом (52.3)

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q(x,\ t). \tag{54.1}$$

«Плотность мощности» источников тепла q должна считаться заданной функцией координаты и времени. Но заданием источников решение уравнения (54.1) еще не определяется однозначно. К нему необходимо добавить так называемые *начальные и граничные условия*. Типичные начальные и граничные условия состоят в следующем.

Начальное условие определяет температуру во всем теле в какой-то один момент времени, который удобно принять за начало отсчета времени. Это условие можно записать в виде

$$T_{t=0} = f(x), \tag{54.2}$$

где $f(x)$ — заданная функция координаты x. Граничные условия определяют температуру тела на границе тела во все моменты времени. В одномерном случае тело имеет вид плоскопараллельной пластинки, ограниченной плоскостями $x = 0$ и $x = l$. Поэтому граничные условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} T_{x=0} &= \varphi_1(t), \\ T_{x=l} &= \varphi_2(t), \end{aligned} \tag{54.3}$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — заданные функции времени.