Постоянная интегрирования C должна равняться нулю, так как в противном случае в центре шара мы получили бы бесконечное значение для производной dT/dr. Интегрируя вторично с учетом граничного условия $T = T_0$ при $r = R$, найдем

$$T = T_0 + \frac{q}{6\varkappa}(R^2 - r^2).$$

Температура в центре шара

$$T_C = T_0 + \frac{qR^2}{6\varkappa} = 790\ \text{К}.$$

2. По однородному цилиндрическому проводу без изоляции течет постоянный электрический ток. Определить стационарное распределение температуры в проводе, если его поверхность поддерживается при постоянной температуре T_0.

Ответ. $T = T_0 + \frac{I^2\rho}{4\pi^2 R^4 \varkappa}(R^2 - r^2)$, где I — сила тока, ρ — удельное сопротивление провода, R — радиус провода, r — расстояние до его оси. Все величины выражаются в единицах системы СГС.

§ 54. Нестационарные задачи. Теорема единственности

1. Будем предполагать, что среда, в которой распространяется тепло, *однородна*, т. е. все параметры среды $\varkappa$, ρ, c_v не зависят от координат. Будем считать также, что они не зависят от времени и температуры, т. е. являются *постоянными*. Когда температура T зависит только от одной пространственной координаты x и времени, уравнение теплопроводности при наличии источников тепла имеет вид (52.8), или с учетом (52.3)

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q(x,\ t). \tag{54.1}$$

«Плотность мощности» источников тепла q должна считаться заданной функцией координаты и времени. Но заданием источников решение уравнения (54.1) еще не определяется однозначно. К нему необходимо добавить так называемые *начальные и граничные условия*. Типичные начальные и граничные условия состоят в следующем.

Начальное условие определяет температуру во всем теле в какой-то один момент времени, который удобно принять за начало отсчета времени. Это условие можно записать в виде

$$T_{t=0} = f(x), \tag{54.2}$$

где $f(x)$ — заданная функция координаты x. Граничные условия определяют температуру тела на границе тела во все моменты времени. В одномерном случае тело имеет вид плоскопараллельной пластинки, ограниченной плоскостями $x = 0$ и $x = l$. Поэтому граничные условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} T_{x=0} &= \varphi_1(t), \\ T_{x=l} &= \varphi_2(t), \end{aligned} \tag{54.3}$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — заданные функции времени.

2. Единственность решения сформулированной краевой задачи обусловлена тем, что коэффициент температуропроводности χ есть величина *существенно положительная*. Для доказательства единственности решения допустим, что уравнение (54.1) имеет два решения: $T_1(x, t)$ и $T_2(x, t)$, удовлетворяющие начальному условию (54.2) и краевым условиям (54.3). Тогда

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}=\chi\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}+q/\rho c, \quad \frac{\partial T_2}{\partial t}=\chi\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}+q/\rho c.$$

Вычитая почленно и вводя обозначение $\Theta = T_1 - T_2$, получим

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}=\chi\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}, \tag{54.4}$$

т. е. функция $\Theta(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности без источников. Кроме того, ясно, что эта функция удовлетворяет «нулевым» начальным и граничным условиям:

$$\Theta_{t=0}=0 \quad \text{при любых } x, \tag{54.5}$$

$$\left.\begin{aligned}\Theta_{x=0}&=0,\\ \Theta_{x=l}&=0\end{aligned}\right\} \text{при любых } t. \tag{54.6}$$

Рассмотрим интеграл $I(t)=\int\limits_0^l \Theta^2\,dx$. Ясно, что он не может быть отрицательным. Кроме того, ввиду (54.5), $I(0) = 0$. Найдем производную интеграла $I(t)$ по времени:

$$\frac{dI}{dt}=2\int\limits_0^l \Theta\frac{\partial\Theta}{\partial t}\,dx=2\chi\int\limits_0^l \Theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\,dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\frac{dI}{dt}=2\chi\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big|_0^l-2\chi\int\limits_0^l\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2dx.$$

Первое слагаемое в правой части обращается в нуль ввиду граничных условий (54.6). Второе слагаемое отрицательно или нуль, так как $\chi>0$. Таким образом, $\frac{dI}{dt}\leqslant 0$. С течением времени интеграл I может только убывать или оставаться постоянным. Первое невозможно, так как должно быть $I(0) = 0$, $I(t)\geqslant 0$. Остается единственная возможность $dI/dt = 0$, т. е. $I(t) = \text{const} = I(0) = 0$. Это возможно тогда и только тогда, когда $\Theta(x, t)\equiv 0$, т. е. $T_1(x, t)\equiv T_2(x, t)$. Единственность решения доказана.

Рассуждая так же, легко показать, что теорема единственности справедлива и для задач со сферической или цилиндрической симметрией. Она остается справедливой и для тел произвольной формы, когда T зависит от всех трех пространственных координат. Доказательство проводится так же, только вместо простых интегралов надо пользоваться объемными и поверхностными интегралами. Это доказательство выходит за пределы нашего курса.

Если каким-либо способом удается найти или угадать решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее требуемым начальным и граничным условиям, то теорема единственности позволяет утверждать, что это и будет искомым решением задачи. Примеры на использование этого метода будут приведены в § 56.

3. Могут быть и такие задачи, в которых единственность решения обусловлена другими причинами. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Два теплоизолированных тела 1 и 2 с разными температурами соединены между собой однородным теплопроводящим стержнем, боковая поверхность которого также теплоизолирована. Начальные температуры тел равны соответственно T_{10} и T_{20}. Требуется найти закон изменения температуры этих тел во времени.

В такой формулировке задача содержит еще слишком много неопределенного. Для устранения неопределенности предположим прежде всего, что теплопроводность обоих тел очень велика (математически — бесконечно велика). Тогда выравнивание температур между различными частями тел будет происходить практически мгновенно. Поэтому в каждый момент времени t можно ввести определенные температуры $T_1(t)$ и $T_2(t)$, характеризующие тела 1 и 2 в целом. Но этого еще недостаточно, чтобы задача стала полностью определенной. Необходимо еще ввести дополнительно некоторые предположения относительно стержня. Поток тепла через поперечное сечение стержня будет зависеть от начального распределения температуры в нем. Если начальная температура стержня равна T_{10}, то на границе с телом 1 в стержне в начальный момент времени не будет никакого теплового потока, тогда как на границе с телом 2 поток тепла будет максимальным. Если стержень имел промежуточную температуру между T_{10} и T_{20}, то начальный поток тепла будет как-то меняться вдоль стержня от сечения к сечению. Допустим, однако, что теплоемкость стержня пренебрежимо мала по сравнению с теплоемкостями тел C_1 и C_2. По истечении некоторого времени в стержне возникает равномерное падение температуры, при котором поток тепла не будет изменяться вдоль стержня. За это время температуры тел 1 и 2, ввиду больших значений их теплоемкостей, практически не изменятся. Поэтому от процесса установления потока тепла в стержне можно отвлечься и считать, что с самого начала поток тепла вдоль стержня один и тот же во всех его сечениях. Тогда задача становится математически определенной, т. е. однозначной. Допустим для определенности, что $T_1 > T_2$. Поток тепла вдоль стержня от тела 1 к телу 2 равен

$$\varkappa S\,\frac{T_1-T_2}{l},$$

где S — площадь поперечного сечения стержня, l — его длина. Этот поток численно равен скорости убывания $-dQ_1/dt$ тепла в теле 1 или скорости приращения $+dQ_2/dt$ тепла в теле 2. Считая теплоемкости C_1 и C_2 постоянными, можно написать $Q_1 = C_1T_1$, $Q_2 = C_2T_2$. Это приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} C_1\frac{dT_1}{dt} &= -\varkappa S\,\frac{T_1-T_2}{l}, \\ C_2\frac{dT_2}{dt} &= \varkappa S\,\frac{T_1-T_2}{l}. \end{aligned} \tag{54.7}$$

Почленное сложение уравнений (54.7) дает

$$C_1\frac{dT_1}{dt}+C_2\frac{dT_2}{dt}=0,$$

или после интегрирования $C_1T_1+C_2T_2=\text{const}$. Это уравнение выражает сохранение общего количества тепла, содержащегося в телах 1 и 2. В начальный момент $T_1=T_{10}$, $T_2=T_{20}$, а потому

$$C_1T_1+C_2T_2=C_1T_{10}+C_2T_{20}. \tag{54.8}$$

Этого уравнения недостаточно для определения неизвестных T_1 и T_2. Для нахождения недостающего уравнения разрешим уравнения (54.7) относительно производных dT_1/dt и dT_2/dt и вычтем почленно из одного уравнения другое. Тогда получим

$$\frac{d(T_1-T_2)}{dt}=-\frac{T_1-T_2}{\tau}, \tag{54.9}$$

где введено обозначение

$$\frac{1}{\tau}=\frac{\varkappa S}{l}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right). \tag{54.10}$$

Постоянная τ имеет размерность времени. Интегрируя уравнение (54.9), получим

$$T_1-T_2=Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Разность температур T_1-T_2 убывает во времени по экспоненциальному закону. За время τ эта разность убывает в e раз. Поэтому τ характеризует время установления теплового равновесия между телами 1 и 2. Оно называется *временем релаксации или временем выравнивания температур* рассматриваемых тел. Постоянная интегрирования A найдется из начальных условий: $T_1=T_{10}$, $T_2=T_{20}$ при $t=0$. Это дает

$$T_1-T_2=(T_{10}-T_{20})\,e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{54.11}$$

Решая теперь систему уравнений (54.8) и (54.11), найдем

$$\left.\begin{aligned}T_1&=\frac{C_1T_{10}+C_2T_{20}}{C_1+C_2}+\frac{C_2}{C_1+C_2}(T_{10}-T_{20})\,e^{-\frac{t}{\tau}},\\ T_2&=\frac{C_1T_{10}+C_2T_{20}}{C_1+C_2}-\frac{C_1}{C_1+C_2}(T_{10}-T_{20})\,e^{-\frac{t}{\tau}}.\end{aligned}\right\} \tag{54.12}$$

При $t\gg\tau$ экспоненциальные члены в этих выражениях пренебрежимо малы, и формулы (54.12) переходят в общеизвестное выражение, определяющее «температуру смеси».

ЗАДАЧИ

1. Определить толщину льда, образующегося в течение заданного времени на спокойной поверхности озера. Считать, что температура T окружающего воздуха все время постоянна и равна температуре наружной поверхности льда ($T<T_{\text{пл}}$, где $T_{\text{пл}}$ — температура плавления льда).

Решение. Обозначим буквой x толщину образовавшегося слоя льда к моменту времени t. Если замерзание идет не очень быстро, как это в действительности имеет место в естественных условиях, то в слое льда установится линейное падение температуры от $T_{пл}$ до T. В этом случае тепло, уходящее наружу от единицы поверхности льда за время dt, представится выражением

$$\varkappa \frac{T_{пл}-T}{x} dt.$$

Но ту же величину можно представить в виде $q\,\rho dx$, где dx — толщина слоя льда, образовавшегося за время dt, ρ — плотность льда, q — удельная теплота плавления льда. Это приводит к уравнению

$$\varkappa \frac{T_{пл}-T}{x} dt = q\rho\, dx.$$

Умножая на x и интегрируя, получим

$$\varkappa (T_{пл}-T)\, t = \frac{1}{2} q\rho x^2 + A.$$

Примем за начало отсчета времени момент, когда образование льда на поверхности воды только что началось. Тогда $x=0$ при $t=0$, а потому $A=0$. В результате получим

$$x = \sqrt{\frac{2\varkappa (T_{пл}-T)\, t}{q\rho}}. \tag{54.13}$$

Для льда $\varkappa = 2{,}22\cdot 10^5$ эрг/(с·см·К), $q = 3{,}35\cdot 10^9$ эрг/г, $\rho = 0{,}9$ г/см^3. Допустим, что температура окружающего воздуха равна —10 °С. Пользуясь этими данными, нетрудно вычислить, что за сутки ($t = 86\,400$ с) образуется слой льда толщиной $x \approx 11{,}3$ см.

2. Сферический кусок льда (с начальным радиусом $R_0 = 1$ см) погружен в большую массу воды с температурой 10 °С. Предполагая, что теплопередача в жидкости связана только с ее теплопроводностью, определить время τ, в течение которого лед полностью растает. Теплопроводность воды $\varkappa = 6\cdot 10^{-3}$ Вт/(см·К), удельная теплота плавления льда $q = 330$ Дж/г.

Решение. Если таяние льда идет не очень быстро, то мгновенное распределение температуры в окружающей воде будет таким же, что и в стационарном случае при тех же граничных значениях температуры. Согласно (53.2) оно в рассматриваемом случае имеет вид

$$T = T_\infty + \frac{R}{r}\,(T_0 - T_\infty),$$

где R — мгновенное значение радиуса куска льда, T_0 и T_∞ — постоянные температуры воды на поверхности шара и в бесконечности (по условию задачи $T_\infty - T_0 = 10$ К). Количество тепла, поступающее к шару от окружающей воды за время dt, равно

$$4\pi r^2 \varkappa \frac{dT}{dr} dt = 4\pi\varkappa R\,(T_\infty - T_0)\, dt.$$

Это тепло идет на расплавление льда и потому может быть также представлено выражением

$$-q\, dm = -4\pi R^2 \rho_л q\, dR.$$

Приравнивая оба выражения, получим

$$\varkappa\,(T_\infty - T_0)\, dt = -\rho_л q R\, dR.$$

Отсюда интегрированием находим искомое время таяния льда

$$\tau = \frac{\rho_л q R_0^2}{2\varkappa\,(T_\infty - T_0)} \approx 2480 \text{ с} \approx 40 \text{ мин}.$$