§ 55. Принцип суперпозиции температур. Температурные волны

1. Уравнение теплопроводности (52.6) *линейно* и *однородно*. Следствием этого является важное свойство его решений, называемое *принципом суперпозиции* температурных возмущений. Пусть $T_1(x, t)$ и $T_2(x, t)$ — какие-либо два решения уравнения (52.6), т. е.

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}.$$

Если почленно сложить эти соотношения, то получится

$$\frac{\partial (T_1 + T_2)}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 (T_1 + T_2)}{\partial x^2}.$$

Отсюда видно, что сумма $T = T_1 + T_2$ также является решением уравнения (52.6). Вообще, *сумма произвольного числа решений уравнения теплопроводности сама является решением того же уравнения*. Эта математическая теорема выражает следующий физический факт. *Пусть $T_1(x, t)$, $T_2(x, t)$, ... — какие-либо возможные произвольные распределения температуры в среде. Тогда их сумма $T = T_1(x, t) + T_2(x, t) + \ldots$ дает также некоторое возможное распределение температуры в той же среде.* Это положение и называется принципом суперпозиции (наложения) температурных возмущений.

Для правильного понимания и применения принципа суперпозиции температур необходимо иметь в виду, что свойства реальных сред, в том числе и коэффициент температуропроводности χ, меняются с температурой. Этого при доказательстве мы не учитывали. Температура $T = T_1 + T_2 + \ldots$ может оказаться, например, настолько высокой, что твердое тело расплавится или испарится. Тогда решение $T = T_1 + T_2 + \ldots$ потеряет всякий смысл. Таким образом, свойства линейности и однородности уравнение теплопроводности сохраняет лишь приближенно в каком-то температурном интервале, в котором коэффициент температуропроводности постоянен. Ширина интервала зависит от самой среды, а также от степени точности, предъявляемой к расчету. Принцип суперпозиции сохраняет силу только тогда, когда все температуры T_1, T_2, ..., а также их сумма не выходят за пределы этого интервала. Вне этих пределов принцип суперпозиции несправедлив. Основное значение принципа суперпозиции состоит в том, что он позволяет по известным решениям уравнения теплопроводности «конструировать» новые решения.

2. Теорема, обратная только что доказанной, конечно, несправедлива. Сумма $T = T_1 + T_2$ может быть решением уравнения теплопроводности (5.26), но слагаемые T_1 и T_2 могут и не быть таковыми. Однако формально математически можно ввести *комплексные решения*. Пусть T — комплексная функция, удовлетворяющая уравнению (52.6). Разобьем ее на вещественную и мнимую части: $T = T_1 + iT_2$, где T_1 и T_2 — величины вещественные. Подставляя это выражение в уравнение (52.6) и отделяя вещественную часть от мнимой, получим

$$\left(\frac{\partial T_1}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}\right) + i\left(\frac{\partial T_2}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}\right) = 0.$$

Но комплексное число тогда и только тогда равно нулю, когда в отдельности равны нулю его вещественная и мнимая части, т. е.

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = 0.$$

Значит, если комплексная функция $T = T_1 + iT_2$ является решением уравнения теплопроводности, то вещественные функции T_1 и T_2 также являются решениями того же уравнения. Справедливость этого утверждения связана с тем, что переменные x и t, а также коэффициент χ — *величины вещественные*. Оно остается в силе для любых линейных однородных дифференциальных уравнений с вещественными коэффициентами и часто дает удобный метод отыскания вещественных решений таких уравнений. Проиллюстрируем это на примере так называемых *температурных* волн. Этот вопрос можно было бы рассмотреть и не выходя за пределы класса вещественных функций, но такой метод был бы громоздким и противоестественным.

3. Если в каком-либо месте среды температура периодически меняется во времени, то это приведет к периодическим изменениям температуры и во всех остальных точках среды. Рассмотрим простейший случай, когда среда однородна и заполняет полупространство, ограниченное плоскостью $x = 0$. Ось X направим внутрь среды перпендикулярно к ее границе. Пусть температура на поверхности среды меняется во времени по синусоидальному или косинусоидальному закону, колеблясь вокруг некоторого среднего значения. Это среднее значение можно принять равным нулю, если условиться от него отсчитывать температуру. Так мы и поступим. При отыскании периодических решений уравнения теплопроводности вместо синуса или косинуса удобнее пользоваться комплексной показательной функцией, а затем с помощью известной формулы Эйлера (1707—1783)

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \tag{55.1}$$

перейти к вещественной форме решения. Рассмотрим комплексную функцию

$$T = T_0 e^{i(\omega t - kx)}, \tag{55.2}$$

где T_0, ω и k — постоянные. Посмотрим, при каких значениях этих постоянных функция (55.2) будет решением уравнения теплопроводности. Дифференцирование дает

$$\frac{\partial T}{\partial t} = i\omega T_0 e^{i(\omega t - kx)} = i\omega T,$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -k^2 T_0 e^{i(\omega t - kx)} = -k^2 T.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (52.6) и сокращая, получим

$$i\omega = -\chi k^2. \tag{55.3}$$

Если выполнено это условие, то функция (55.2) будет решением уравнения (52.6), какова бы ни была постоянная T_0. Постоянную ω мы выберем вещественной и положительной. Тогда постоянная k будет комплексной и может иметь два значения:

$$k = \sqrt{-i\frac{\omega}{\chi}} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}(1-i). \tag{55.4}$$

В результате выражение (55.2) преобразуется в

$$T = T_0 e^{\mp\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}x} e^{i\left(\omega t \mp \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}x\right)}. \tag{55.5}$$

Здесь содержатся два, а не четыре решения, так как верхний знак должен комбинироваться с верхним, а нижний — с нижним. Из этих двух решений одно надо отбросить по физическим соображениям. Колебания температуры начинают возбуждаться на поверхности среды и передаются внутрь нее. Естественно, что эти колебания должны *затухать*, а не нарастать по мере удаления от поверхности среды. Между тем знаку плюс в формуле (55.5) соответствует экспоненциально растущий множитель $e^{+\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}x}$, стремящийся к бесконечности при $x \to \infty$. Этот знак не удовлетворяет условиям задачи, и надо сохранить только знак минус.

Далее, необходимо перейти к вещественной форме решения, так как только такие решения имеют физический смысл. Как показано выше, всякое комплексное решение эквивалентно двум вещественным решениям. Из комплексного решения (55.5) описанным выше способом получаются два решения в вещественной форме:

$$T \equiv T_1 = T_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}\,x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}\,x\right), \tag{55.6}$$

$$T \equiv T_2 = T_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}\,x} \sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}\,x\right). \tag{55.7}$$

Можно было бы убедиться непосредственной подстановкой, что найденные выражения являются решениями уравнения (52.6). Тогда отпала бы необходимость в получении вспомогательного решения в комплексной форме (55.5). Но такой способ, как уже отмечалось, сложен и противоестествен.

4. Выясним теперь физический смысл полученных решений. Оба решения (55.6) и (55.7) однотипны — синус всегда можно преобразовать в косинус путем изменения начала отсчета времени. Поэтому достаточно ограничиться исследованием одного их них. Остановимся, например, на решении (55.6).

Если фиксировать x, то видно, что в каждой точке пространства температура T совершает во времени гармонические колебания с одним и тем же периодом $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$. Фаза этих колебаний меняется от точки к точке. Поверхность равной фазы

$$\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}\,x = \text{const} \tag{55.8}$$

есть плоскость, параллельная поверхности среды. Она не остается на месте, а перемещается в направлении оси X с определенной скоростью v. Поэтому возмущения, описываемые решением (55.6), называют *температурной волной*, а постоянную v — *фазовой скоростью* или просто *скоростью этой волны*. Скорость v легко найти дифференцированием уравнения (55.8). Это дает

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2\chi\omega} = 2\sqrt{\frac{\pi\chi}{\tau}}. \tag{55.9}$$

Длина температурной волны λ есть расстояние, проходимое ею за период τ. Она равна

$$\lambda = v\tau = 2\pi\sqrt{\pi\chi\tau}. \tag{55.10}$$

Амплитуда A температурной волны, как видно из формулы (55.6), затухает в направлении распространения по экспоненциальному закону:

$$A = T_0 e^{-\alpha x}, \tag{55.11}$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} = \sqrt{\frac{\pi}{\chi\tau}} = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{55.12}$$

Постоянная α называется *коэффициентом затухания температурной волны*. На протяжении длины $l = \frac{1}{\alpha} = \frac{\lambda}{2\pi}$ амплитуда волны убывает в e раз.

5. Легко найти, каким начальным и граничным условиям удовлетворяет решение (55.6). Эти условия получатся, если в формуле (55.6) положить сначала $x = 0$, а затем $t = 0$. Таким путем находим

$$T_{x=0} = T_0 \cos \omega t, \tag{55.13}$$

$$T_{t=0} = T_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}\,x} \cos\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}\,x. \tag{55.14}$$

На основании теоремы единственности (§ 54) делаем вывод, что единственным решением, удовлетворяющим этим условиям, является решение (55.6). В противоположность граничному условию (55.13) начальное условие (55.14) имеет весьма искусственный характер, и реальная физическая задача должна ставиться иначе. Возможна, например, следующая постановка. На поверхности среды в момент времени $t=0$ возбуждается, а затем поддерживаются неограниченно долго гармонические колебания, представляемые выражением (55.13). Никаких источников тепла внутри среды нет, начальное распределение температуры может быть каким угодно. Требуется определить, какие колебания температуры установятся в среде по прошествии достаточно длинного промежутка времени. Ответ дает формула (55.6). Действительно, по прошествии очень длинного промежутка времени все колебания температуры в среде затухнут, за исключением вынужденных колебаний, поддерживаемых внешними источниками, причем эти вынужденные колебания должны обладать той же периодичностью во времени, что и колебания температуры на поверхности среды.

6. Применим выведенные результаты к тепловым волнам, возбуждаемым в поверхностном слое Земли суточными и годовыми колебаниями температуры ее поверхности. Для простоты будем считать, что колебания являются гармоническими. Реальные колебания, конечно, не гармонические. Но это мало существенно. Дело в том, что любое периодическое колебание можно представить в виде наложения гармонических колебаний кратных периодов, причем основное значение имеют низкочастотные колебания, поскольку коэффициент затухания растет пропорционально квадратному корню из частоты. Периодами таких низкочастотных колебаний в нашей задаче являются соответственно год и сутки. Глубины проникновения суточных и годовых температурных волн, согласно формуле (55.12), должны быть связаны соотношением

$$\frac{l_{\text{год}}}{l_{\text{сут}}}=\sqrt{\frac{\tau_{\text{год}}}{\tau_{\text{сут}}}}=\sqrt{365}\approx 19.$$

И действительно, экспериментально было найдено, что колебания температуры, вызываемые нагреванием земной поверхности днем и охлаждением ночью, не влияют на температуру Земли уже на глубине ~ 1 м. Годовые же колебания земной поверхности, связанные с нагреванием ее летом и охлаждением зимой, перестают наблюдаться на глубине ~ 20 м. Глубже температура Земли совершенно не зависит от температурных колебаний ее поверхности. Все это находится в полном соответствии с теоретической оценкой, приведенной выше. Вместе с тем мы видим, что глубина проникновения температурных волн пренебрежимо мала по сравнению с радиусом Земли. Вот почему при вычислениях можно было совсем пренебречь сферичностью Земли и считать ее плоской.

Другое подтверждение теории дают наблюдения по скорости распространения тепловых волн вблизи земной поверхности. Наблюдения показали, что скорость распространения тепловых волн с периодом в одни сутки $v_{\text{сут}}$ составляет около 1 м/сутки, а скорость волн с годичным периодом $v_{\text{год}}\approx 0{,}046$ м/сутки. Отношение этих скоростей

$$\frac{v_{\text{сут}}}{v_{\text{год}}}\approx\frac{1}{0{,}046}\approx 22,$$

тогда как по теории оно должно быть

$$\frac{v_{\text{сут}}}{v_{\text{год}}}=\sqrt{\frac{\tau_{\text{год}}}{\tau_{\text{сут}}}}=\sqrt{365}\approx 19.$$

Полного согласия ожидать трудно хотя бы потому, что Земля не является однородной средой, как это предполагает теория.