§ 56. Задача об остывании полупространства

1. Пусть однородная среда заполняет полупространство, ограниченное плоскостью $x = 0$. В начальный момент времени $t = 0$ температура среды всюду одинакова и равна T_0. Температура на поверхности среды все время поддерживается постоянной и равна $T_1 \neq T_0$. Таким образом, в начальный момент на границе среды температура испытывает скачок. Требуется найти распределение температуры $T(x, t)$ в среде во все последующие моменты времени. Эта задача была поставлена и решена В. Томсоном. Она является типичной краевой задачей, к которой применима теорема единственности, доказанная в § 54.

Направим ось X внутрь среды перпендикулярно к ее границе. Распределение температуры описывается уравнением теплопроводности (52.6). Чтобы найти его решение, удовлетворяющее требуемым начальным и краевым условиям, воспользуемся сначала методом размерности. Задача состоит в нахождении связи между переменными T, x, t и параметрами T_0, T_1, χ. Как видно из уравнения (52.6), коэффициент температуропроводности χ имеет размерность квадрата длины, деленного на время. Учитывая это, нетрудно стандартным способом показать, что из шести величин T, x, t, T_0, T_1, χ можно составить только три независимые безразмерные комбинации, например, $\frac{T}{T_0}$, $\frac{T_1}{T_0}$, $\frac{x}{\sqrt{\chi t}}$. Согласно правилу размерности распределение температуры в среде может быть записано в виде функциональной связи между этими безразмерными комбинациями. Но вторая из них T_1/T_0 есть просто постоянное число, и следовательно, может не учитываться при написании искомой функциональной связи. Таким образом, должно быть

$$\frac{T}{T_0} = F\left(\frac{x}{\sqrt{\chi t}}\right),$$

или

$$T = f(\xi), \tag{56.1}$$

где введено обозначение

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\chi t}}. \tag{56.2}$$

Явный вид функции f можно определить из уравнения теплопроводности (52.6). Дифференцированием находим:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{df}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{df}{d\xi}\frac{1}{2\sqrt{\chi t}},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}\frac{1}{2\sqrt{\chi t}}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}\frac{1}{4\chi t},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{df}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{1}{4}\frac{df}{d\xi}\frac{x}{t\sqrt{\chi t}}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (52.6), получим после сокращения

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = -2\xi\frac{df}{d\xi}. \tag{56.3}$$

Обозначая дифференцирование по ξ штрихом и разделяя переменные, запишем это уравнение в виде

$$\frac{df'}{f'} = -2\xi\, d\xi,$$

или

$$\frac{df'}{f'} = -d\xi^2.$$

Интегрирование дает:

$$f' = Ae^{-\xi^2}.$$

Интегрируя вторично и имея в виду, что $f = T$, получим

$$T = A \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}} e^{-\xi^2} d\xi + B.$$

Остается найти постоянные интегрирования A и B. Полагая $x = 0$, $t \neq 0$, получаем $T = B$. Таким образом, постоянная B дает температуру поверхности среды во все моменты времени $t \neq 0$. По условию задачи она постоянна и равна T_1. Для определения постоянной A воспользуемся начальным условием: $T = T_0$ при $t = 0$. Это дает

$$T_0 = A \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi + T_1.$$

В интегральном исчислении доказывается, что входящий сюда интеграл равен $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Таким образом, $T_0 = \frac{A}{2}\sqrt{\pi} + T_1$. Окончательное решение задачи имеет вид

$$T = 2\frac{T_0 - T_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}} e^{-\xi^2} d\xi + T_1. \tag{56.4}$$

Из этой формулы дифференцированием по x получаем значение температурного градиента

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_0 - T_1}{\sqrt{\pi \chi t}} e^{-\frac{x^2}{4\chi t}}. \tag{56.5}$$

В частности, на поверхности среды, т. е. при $x = 0$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_0 - T_1}{\sqrt{\pi \chi t}}. \tag{56.6}$$

Если по формуле (55.9) ввести сюда скорость распространения тепловых волн v с периодом τ, то получится

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2\frac{T_0 - T_1}{v\sqrt{\tau t}}. \tag{56.7}$$

2. Формула (56.7) интересна в том отношении, что с ее помощью Томсон вычислил возраст Земли. В то время считалось, что первоначально Земля находилась в огненно-жидком состоянии. В недрах Земли происходили интенсивные процессы перемешивания, приводившие к выравниванию температур. Приближенно можно было считать температуру Земли одной и той же во всех ее точках. Поэтому задача об остывании Земли аналогична рассмотренной нами задаче об остывании полупространства. Сферичность Земли не может играть существенной роли, если нас интересует температурный градиент внутри тонкого поверхностного слоя Земли. В этом случае можно воспользоваться формулой (56.7) без всяких изменений. По мере остывания Земли образовывалась твердая земная кора. Начало этого процесса и принимается за момент времени, от которого отсчитывается возраст Земли. Томсон предположил, что коэффициент температуропроводности Земли все время оставался постоянным, и для вычисления возраста Земли t воспользовался формулой (56.7). Как мы уже говорили, на глубине 20 и более метров на температуру Земли уже не оказывают влияния температурные колебания окружающей атмосферы. Измерения показали, что на таких глубинах температура повышается приблизительно на 1° при углублении на каждые 25 м. Далее, Томсон условно принял, что температура поверхности Земли T_1 равна 0 °С, а в качестве T_0 взял температуру затвердевания горных пород: $T_0 \approx 4000$ °С. Если за период τ взять одни сутки, то, как мы видели, наблюдения дают $v \approx 1$ м/сутки. Подставляя эти значения в формулу (56.7), получим

$$t = \frac{4\,(T_0 - T_1)^2}{v^2 \tau \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2} = \frac{4 \cdot 4000^2}{\left(\frac{1}{25}\right)^2} \text{ суток} \approx 10^8 \text{ лет.}$$

Приведенная оценка дает сильно заниженное значение для возраста Земли. Это и понятно. Томсон не учитывал и не мог учитывать интенсивное выделение тепла в недрах Земли в результате происходящих в ней радиоактивных процессов. Кроме того, модель огненно-жидкой Земли не согласуется со многими фактами и в настоящее время не считается правильной. В настоящее время не существует общепризнанной теории происхождения Земли. А без такой теории трудно говорить об определенном возрасте Земли.

§ 57. Внешняя теплопроводность

1. Формула (52.3), определяющая плотность потока тепла j, относится к случаю, когда распределение температуры в среде непрерывно, а коэффициент теплопроводности $\varkappa$ также является непрерывной функцией координат. В этом случае говорят о *внутренней теплопроводности*. В сущности, распределение температуры в пространстве всегда непрерывно. Однако для упрощения математических расчетов иногда бывает целесообразно ввести идеализированное представление о *скачке температур* на границе раздела двух различных тел, не находящихся в тепловом равновесии друг с другом. Допустим, например, что нагретое металлическое тело охлаждается потоком воды или воздуха. Ввиду большой теплопроводности металлов происходит быстрое выравнивание температур между различными частями металлического тела. Идеализируя задачу, можно принять, что в каждый момент времени тело имеет одну и ту же температуру. Точно так же окружающей среде, ввиду происходящих в ней процессов перемешивания, можно приписать в каждый момент времени одну и ту же температуру, отличную, однако, от температуры самого тела.

Благодаря процессам теплообмена возникает тепловой поток через границу тел, обусловленный скачком температуры на этой границе. Нормальная составляющая этого потока зависит от материала обеих сред, а также от их температур. Простейшее предположение, введенное Ньютоном, состоит в том, что *величина j_n пропорциональна разности температур тел на границе*. Обычно предполагается, что одно из тел целиком окружает другое тело. Его мы будем называть *окружающей средой*. Таким образом, согласно Ньютону,

$$j_n = \alpha\,(T - T_0), \tag{57.1}$$