глубине 20 и более метров на температуру Земли уже не оказывают влияния температурные колебания окружающей атмосферы. Измерения показали, что на таких глубинах температура повышается приблизительно на 1° при углублении на каждые 25 м. Далее, Томсон условно принял, что температура поверхности Земли T_1 равна 0 °С, а в качестве T_0 взял температуру затвердевания горных пород: $T_0 \approx 4000$ °С. Если за период τ взять одни сутки, то, как мы видели, наблюдения дают $v \approx 1$ м/сутки. Подставляя эти значения в формулу (56.7), получим

$$t = \frac{4\,(T_0 - T_1)^2}{v^2\tau\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)^2} = \frac{4 \cdot 4000^2}{\left(\dfrac{1}{25}\right)^2} \text{ суток} \approx 10^8 \text{ лет.}$$

Приведенная оценка дает сильно заниженное значение для возраста Земли. Это и понятно. Томсон не учитывал и не мог учитывать интенсивное выделение тепла в недрах Земли в результате происходящих в ней радиоактивных процессов. Кроме того, модель огненно-жидкой Земли не согласуется со многими фактами и в настоящее время не считается правильной. В настоящее время не существует общепризнанной теории происхождения Земли. А без такой теории трудно говорить об *определенном* возрасте Земли.

§ 57. Внешняя теплопроводность

1. Формула (52.3), определяющая плотность потока тепла j, относится к случаю, когда распределение температуры в среде непрерывно, а коэффициент теплопроводности $\varkappa$ также является непрерывной функцией координат. В этом случае говорят о *внутренней теплопроводности*. В сущности, распределение температуры в пространстве всегда непрерывно. Однако для упрощения математических расчетов иногда бывает целесообразно ввести идеализированное представление о *скачке температур* на границе раздела двух различных тел, не находящихся в тепловом равновесии друг с другом. Допустим, например, что нагретое металлическое тело охлаждается потоком воды или воздуха. Ввиду большой теплопроводности металлов происходит быстрое выравнивание температур между различными частями металлического тела. Идеализируя задачу, можно принять, что в каждый момент времени тело имеет одну и ту же температуру. Точно так же окружающей среде, ввиду происходящих в ней процессов перемешивания, можно приписать в каждый момент времени одну и ту же температуру, отличную, однако, от температуры самого тела.

Благодаря процессам теплообмена возникает тепловой поток через границу тел, обусловленный скачком температуры на этой границе. Нормальная составляющая этого потока зависит от материала обеих сред, а также от их температур. Простейшее предположение, введенное Ньютоном, состоит в том, что *величина j_n пропорциональна разности температур тел на границе*. Обычно предполагается, что одно из тел целиком окружает другое тело. Его мы будем называть *окружающей средой*. Таким образом, согласно Ньютону,

$$j_n = \alpha\,(T - T_0), \tag{57.1}$$

где T — температура тела, а T_0 — температура окружающей среды. Нормаль n проведена от тела к среде. Постоянная α называется *коэффициентом внешней теплопроводности*. При $\alpha=\infty$ температура на границе всегда непрерывна, т. е. $T=T_0$; при $\alpha=0$ тело адиабатически изолировано.

Опыты показали, что закон Ньютона (57.1) выполняется приближенно и притом лишь при небольших разностях температур. Поэтому коэффициент внешней теплопроводности не имеет такого же важного значения, какое имеет коэффициент внутренней теплопроводности. Коэффициент внешней теплопроводности является сугубо эмпирическим коэффициентом, которым можно пользоваться только в грубых расчетах.

2. Допустим теперь, что тело имеет форму тонкого бесконечно длинного стержня, ориентированного в направлении оси X. Поперечное сечение стержня может быть каким угодно, однако одним и тем же при любых x. Коэффициент теплопроводности материала стержня $\varkappa$ должен быть достаточно большим, а сам стержень тонким, чтобы его температура T не менялась с координатами y и z. Она может зависеть только от времени t и координаты x. От тех же аргументов может зависеть и температура T_0 окружающей среды на поверхности стержня.

В этих предположениях выведем уравнение теплопроводности с учетом внешней теплопроводности.

Рассуждения будут такими же, что и при выводе уравнения (52.4). Только в балансе тепла необходимо учесть дополнительный тепловой поток через боковую поверхность стержня. Для бесконечно малого элемента AB стержня (рис. 40) этот дополнительный тепловой поток, направленный к окружающей среде, равен $\alpha p\,(T-T_0)\,dx$, где p — периметр поперечного сечения стержня. Поэтому вместо уравнения (52.4) получится

$$\rho c_v S\frac{\partial T}{\partial t}=S\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\alpha p\,(T-T_0), \tag{57.2}$$

где S — площадь поперечного сечения стержня. Предполагая $\varkappa$ постоянным и вводя обозначение

$$b^2=\frac{\alpha p}{\rho c_v S}, \tag{57.3}$$

получим

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\chi\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-b^2\,(T-T_0). \tag{57.4}$$

ЗАДАЧИ

1. Найти стационарное распределение температуры в тонком однородном стержне, концы которого поддерживаются при постоянных температурах T_1 и T_2, а температура окружающей среды T_0 также постоянна.

Решение. Удобно за нуль температуры принять температуру T_0 окружающей среды. В таком случае уравнение (57.4) переходит в

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \beta^2 T = 0, \tag{57.5}$$

где β — положительная постоянная, определяемая выражением

$$\beta = \frac{b}{\sqrt{\chi}}. \tag{57.6}$$

Общее решение уравнения (57.5) есть

$$T = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}. \tag{57.7}$$

Постоянные интегрирования A и B определятся из граничных условий: $T = T_1$ при $x = 0$, $T = T_2$ при $x = l$. (Длина стержня обозначена l, начало координат помещено на первом конце стержня.) После элементарных вычислений получим

$$T = \frac{T_1 \operatorname{sh} \beta (l - x) + T_2 \operatorname{sh} \beta x}{\operatorname{sh} \beta l}. \tag{57.8}$$

2. Пусть $T_1, T_2, T_3, T_4, \ldots$ — температуры последовательных равноотстоящих точек стержня в стационарном состоянии. Температура окружающей среды принята за нуль (см. предыдущую задачу). Показать, что эти температуры удовлетворяют соотношению

$$\frac{T_1 + T_3}{T_2} = \frac{T_2 + T_4}{T_3} = \frac{T_3 + T_5}{T_4} = \ldots = \mathrm{const} = e^{\beta\Delta x} + e^{-\beta\Delta x}, \tag{57.9}$$

где Δx — расстояние между двумя соседними точками рассматриваемого ряда равноотстоящих точек.