

§ 67. Адиабатическое нагревание и охлаждение газа с точки зрения молекулярно-кинетической теории

1. Применим полученные результаты к адиабатическому сжатию и расширению идеального газа. Это явление было уже рассмотрено с точки зрения формальной термодинамики (см. § 21), и было показано, что при адиабатическом сжатии газ нагревается, а при адиабатическом расширении — охлаждается. Раскрытие физического механизма этого, как и всякого другого, явления находится вне компетенции формальной термодинамики. Это дело молекулярно-кинетической теории. Чтобы разобраться в механизме явления, допустим, что адиабатическое сжатие или расширение осуществляется перемещением поршня в цилиндре, в котором заключен газ. Если бы поршень оставался неподвижным, то молекулы газа отражались бы от него в среднем с такими же по величине скоростями, какими они обладали до отражения. Для движущегося поршня этого уже не будет. Молекулы, отраженные от движущегося поршня, будут сохранять величину средней скорости только в системе отсчета, в которой поршень покоится. Средние скорости молекул относительно неподвижных стенок цилиндра изменятся. Если поршень вдвигается в цилиндр, то при отражении от него средние скорости молекул увеличиваются — газ нагревается. Если же поршень выдвигается из цилиндра, то они уменьшаются — газ охлаждается. Явление аналогично изменению скорости идеально упругого мяча при отражении от движущейся стенки. Если стенка и мяч движутся навстречу друг другу, то при отражении скорость мяча увеличивается; если же они движутся в одну сторону, то скорость мяча при отражении уменьшается. Так просто и наглядно молекулярно-кинетическая теория объясняет нагревание и охлаждение газа при адиабатическом сжатии и расширении.

2. Нетрудно облечь эти качественные рассуждения в количественную форму и таким путем получить уравнение адиабаты Пуассона. Если поршень вдвигается или выдвигается очень быстро, то термодинамическое равновесие газа нарушается. При ударе о поршень заметно меняется кинетическая энергия только поступательного движения молекулы; вращательная энергия и энергия внутримолекулярных или внутриатомных движений в среднем остается без изменения. Поэтому при быстром движении поршня в газе возникает макроскопическое движение — при вдвигании поршня на долю поступательной степени свободы будет приходиться в среднем большая кинетическая энергия, чем на долю вращательной или колебательной степени свободы, а при выдвигании — меньшая. Равномерное распределение кинетической энергии по степеням свободы нарушается. Если остановить поршень, то в результате столкновений между молекулами начнется процесс приближения газа к состоянию термодинамического равно-

веса. При этом происходит перераспределение кинетической энергии между различными степенями свободы, пока не будет достигнуто равномерное распределение. Однако, когда поршень движется медленно (в пределе бесконечно медленно), этот процесс перераспределения можно считать закончившимся в каждый момент времени. Иными словами, в любой момент времени состояние газа может считаться равновесным, а происходящий с ним процесс — квазистатическим.

3. Итак, допустим, что поршень движется в цилиндре бесконечно медленно со скоростью c (рис. 48). Для простоты будем считать поршень идеально гладким, а отражение молекул от него — зеркальным. Пусть молекула подлетает к поршню со скоростью v_i . Относительно поршня ее скорость будет $v_{i \text{ отн}} = v_i - c$. Нормальная составляющая относительной скорости равна $(v_{i \text{ отн}})_x = v_{ix} - c$. Обозначим $v'_{i \text{ отн}}$ скорость i -й молекулы относительно поршня после отражения. Касательная составляющая относительной скорости в результате отражения не изменится, а нормальная изменит знак, так что

$$(v'_{i \text{ отн}})_x = - (v_{i \text{ отн}})_x = -v_{ix} + c.$$

Обозначим далее v'_i скорость молекулы относительно неподвижных стенок цилиндра после отражения. Ее нормальная составляющая равна $v'_{ix} = (v'_{i \text{ отн}})_x + c = -v_{ix} + 2c$, а касательная составляющая такая же, что и у скорости v_i . В результате отражения от поршня кинетическая энергия молекулы получит приращение

$$\frac{1}{2}m(-v_{ix} + 2c)^2 - \frac{1}{2}mv_{ix}^2 = -2mcv_{ix} + 2mc^2.$$

Слагаемым $2mc^2$ можно пренебречь, как величиной второго порядка малости по c . Обозначим n_i число молекул в единице объема, скорости которых равны или, лучше, приблизительно равны v_i . Число ударов таких молекул о поршень за время dt равно $z_i = Sn_i(v_{ix} - c) dt$, где S — площадь поршня. Здесь также можно пренебречь скоростью c , как величиной, бесконечно малой по сравнению с v_{ix} , т. е. положить $z_i = Sn_i v_{ix} dt$. В результате кинетическая энергия молекул рассматриваемой группы за время dt получит приращение

$$-2mcv_{ix}z_i = -2mn_i v_{ix}^2 Sc dt = -2mn_i v_{ix}^2 dV,$$

где $dV = Scdt$ — приращение объема газа за то же время. Приращение кинетической энергии всего газа

$$dE_{\text{кин}} \equiv dU = -dV \sum_{v_{ix} > 0} 2mn_i v_{ix}^2.$$

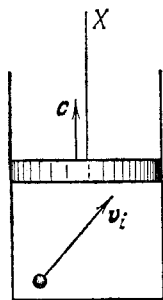


Рис. 48.

Здесь суммирование ведется только по тем группам молекул, которые движутся по направлению к поршню. Если же суммировать по всем группам молекул, движущимся как к поршню, так и от него, то сумму надо разделить пополам. При таком понимании суммирования

$$dU = -dV \sum mn_i v_{ix}^2.$$

В § 59 было показано, что входящая сюда сумма равна давлению газа P . Поэтому

$$dU + P dV = 0.$$

Подставив сюда значение U из формулы (66.12), получим

$$\left(\frac{f}{2} + 1\right) P dV + \frac{f}{2} V dP = 0,$$

или на основании последнего из соотношений (66.11)

$$\gamma P dV + V dP = 0.$$

Это — *дифференциальное уравнение* адиабаты, полученное в § 21 чисто термодинамически. Так как по классической теории теплоемкости γ — величина постоянная, то интегрированием этого уравнения получается уравнение Пуассона

$$P V^\gamma = \text{const.}$$

4. При бесконечно медленном движении поршня каждое отражение молекулы сопровождается бесконечно малым изменением ее скорости. Возникает вопрос, каким образом в этих условиях может получиться конечное изменение температуры газа. На этот вопрос легко ответить. Дело в том, что чем медленнее движется поршень, тем больше требуется времени, чтобы объем газа изменился на заданную величину. За это время произойдет большее число ударов молекул о поршень, чем при более быстром движении. При каждом отражении изменение энергии молекулы тем меньше, чем медленнее движется поршень. Однако произведение числа ударов на среднее изменение энергии молекулы при одном отражении от скорости движения поршня не зависит (если только процесс может считаться квазистатическим). Оно определяется только величинами начального и конечного объемов газа. Поэтому и приращение кинетической энергии теплового движения газа определяется только приращением его объема и совершенно не зависит от того, быстро или медленно двигался поршень (при условии, что процесс — квазистатический).

5. Термин «адиабатический» применяется в физике в двух смыслах. В термодинамике адиабатическим называют процесс, происходящий без подвода и отвода тепла. Он может быть как равновесным, так и неравновесным. В механике под адиабатическим воздействием

на систему понимают такое воздействие, при котором ее внешние параметры меняются бесконечно медленно. Рассмотрим, например, математический маятник — шарик, подвешенный на нерастяжимой нити, перекинутой через гвоздь. Внешними параметрами такой системы являются длина нити l и ускорение силы тяжести g . Потянув рукой за свободный конец нити, можно менять l . Можно также менять величину g , перемещая маятник вверх или вниз. Если эти изменения производятся достаточно медленно, то воздействия на маятник будут адиабатическими. *Функции динамических переменных системы, остающиеся постоянными при адиабатических воздействиях на нее, называются адиабатическими инвариантами.* В этом смысле величина $PV\gamma$ является адиабатическим инвариантом теплоизолированной системы, состоящей из идеального газа. Если газ в цилиндре теплоизолирован, но поршень движется быстро, то величина $PV\gamma$ в ходе процесса, вообще говоря, не будет оставаться постоянной. Более того, поскольку при быстрых движениях поршня процесс будет неравновесным, газу в целом нельзя приписать какое-либо определенное давление P . Если остановить поршень и подождать, чтобы газ пришел в состояние равновесия, то даже в этом случае величина $PV\gamma$, вообще говоря, изменится. Допустим, например, что поршень выдвигается со скоростью, в несколько раз превышающей среднюю скорость теплового движения молекул. Тогда подавляющая доля молекул не сможет «догнать» поршень и отразиться от него. Процесс будет происходить так же, как расширение газа в пустоту. При этом сохранится постоянной внутренняя энергия газа, а с ней и произведение PV . Величина же $PV\gamma$ изменится.

6. Из приведенного рассуждения ясно, что *при одном и том же увеличении объема понижение температуры газа будет наибольшим, когда расширение производится квазистатически.* С формально термодинамической точки зрения понижение температуры газа объясняется работой, которую он вынужден совершать при расширении. В технике квазистатическое адиабатическое расширение газа с производством внешней работы используется для получения низких температур (см. § 105). В отношении этого способа необходимо заметить, что по мере понижения температуры газа его давление уменьшается и может оказаться недостаточным для преодоления внешних сил. Казалось бы, что дальнейшее понижение температуры указанным методом становится невозможным. Это неверно. Для преодоления внешних сил вовсе не обязательно использовать давление самого газа. Важно только заставить газ расширяться, приведя в движение одну из стенок сосуда (поршень), в котором он заключен. А для этого можно воспользоваться каким-либо двигателем. При отражении от движущейся стенки, как ясно из молекулярно-кинетического рассмотрения, приведенного выше, газ будет продолжать охлаждаться. И это охлаждение в прин-

ципе может продолжаться до тех пор, пока газ не перейдет в жидкое состояние. Конечно, и в этом случае охлаждение происходит за счет работы, производимой газом. Но это есть *вынужденная работа*, возможная только потому, что двигатель приводит в движение поршень, от которого отражаются молекулы газа. В отсутствие двигателя разреженный газ не смог бы произвести работу, так как его давление недостаточно для преодоления внешнего давления и различного рода вредных сопротивлений.

ЗАДАЧА

Оценить порядок величины максимальной скорости, с которой артиллерийский снаряд может вылетать из ствола орудия. Какие требования надо предъявлять к пороху, чтобы эта скорость была возможно большей?

Решение. Когда снаряд движется в стволе орудия со скоростью, превышающей скорость теплового движения молекул пороховых газов, последние почти перестают оказывать давление на дно снаряда и ускорять его. Отсюда следует, что максимально достижимая скорость снаряда при вылете из ствола орудия будет порядка средней скорости теплового движения молекул пороховых газов. Она тем больше, чем выше температура пороховых газов и чем меньше их молекулярный вес.

§ 68. Классическая теория теплоемкости твердых тел (кристаллов)

1. Простейшей моделью кристалла является правильно построенная кристаллическая решетка, в узлах которой помещаются атомы, принимаемые за материальные точки. Атомы совершают тепловые колебания около положений равновесия. Если колебания малы, то они будут гармоническими. Энергия каждого атома складывается из кинетической и потенциальной. На каждую степень свободы приходится в среднем кинетическая энергия $\frac{1}{2}kT$. Как было показано в § 63, при гармонических колебаниях на одну степень свободы приходится в среднем такая же потенциальная энергия, т. е. $\frac{1}{2}kT$. Таким образом, среднее значение полной энергии, приходящейся на одну колебательную степень свободы, равно

$$\bar{\epsilon}_{\text{кол}} = \bar{\epsilon}_{\text{кин}} + \bar{\epsilon}_{\text{пот}} = kT. \quad (68.1)$$

Теперь легко рассчитать теплоемкость кристаллической решетки. Для простоты будем считать, что все атомы одинаковы. Каждый атом обладает тремя колебательными степенями свободы, а потому на него приходится средняя энергия $3kT$. Умножив эту величину на число Авогадро N , найдем внутреннюю энергию моля твердого тела $U = N \cdot 3kT = 3RT$. Отсюда для молярной теплоемкости твердого тела получаем

$$C_V = dU/dt = 3R \approx 24,9 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{моль}) \approx 6 \text{ кал}/(\text{К} \cdot \text{моль}). \quad (68.2)$$

Еще в 1819 г. Дюлонг (1785—1838) и Пти (1791—1820) установили эмпирическое правило, согласно которому *произведение удель-*