ГЛАВА VI

СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

* *

§ 70. Элементарные сведения из теории вероятностей

1. С молекулярной точки зрения физические величины, встречающиеся в термодинамике, как и в любом другом отделе макроскопической физики, имеют смысл *средних значений,* которые принимают при определенных условиях какие-то функции микросостояния системы (см. § 9). Про величины такого рода говорят, что они имеют *статистический характер* или являются *статистическими.* Примеры таких величин (давление, плотность, температура, средний квадрат смещения частицы при броуновском движении и пр.) и способы их вычисления были приведены в предыдущей главе. То обстоятельство, что эти величины подчиняются определенным закономерностям, не свойственным отдельным атомам и молекулам, связано с колоссальным количеством таких частиц в макроскопических телах. Такие закономерности, равно как и любые закономерности, обусловленные массовостью участвующих в их возникновении ингредиентов, называются *статистическими* или *вероятностными закономерностями.*

Допустим, например, что бросается монета. Что выпадет в результате бросания — герб или решка — это предсказать невозможно. Хотя движение монеты и строго подчиняется законам механики, но на это движение, а также на начальные условия влияет множество случайных и неконтролируемых факторов, которые делают результат бросания непредсказуемым. Однако, если бросаний произведено очень много, то числа выпавших гербов и решек окажутся почти равными. И это равенство будет выполняться тем точнее, чем больше произведено бросаний. В приведенном примере и проявляется статистическая закономерность. На том же примере видно, что предсказания, которые делаются на основе статистических законов, не являются абсолютно достоверными, а носят характер прогнозов, которые могут и не оправдываться. Почти все законы макроскопической физики — статистические. Однако колоссальность количества молекул и атомов в макроскопических телах превращает статистические законы физики и основанные на них предсказания в практически абсолютно достоверные.

Классическая физика считала, что за статистическими или вероятностными законами, управляющими поведением макроскопических систем, стоят точные *динамические законы*, которым подчиняются отдельные атомы, молекулы и составляющие их частицы. Квантовая физика идет дальше. Она утверждает, что и элементарные законы микромира являются также законами статистическими. С ее точки зрения не существует строго динамических законов — все законы статистические. Однако здесь нет необходимости вдаваться в обсуждение этих вопросов. Для наших целей пока достаточна классическая точка зрения.

С чисто математической точки зрения, отвлекающейся от конкретного смысла рассматриваемых величин, статистические закономерности изучаются *теорией вероятностей*. Ниже приводятся самые элементарные сведения из теории вероятностей, необходимые для дальнейшего изложения.

2. Современная математическая теория вероятностей строится как абстрактная аксиоматическая наука. Под вероятностями понимают некоторые числа, подчиняющиеся определенной системе аксиом, из которых формально логически выводится все остальное. Вопрос о конкретном смысле вероятностей в абстрактной теории не ставится. Он решается отдельно в конкретных случаях, когда от теории переходят к ее приложениям. В физике, как и во всех прикладных вопросах, более предпочтителен другой подход к теории вероятностей, в котором вероятность органически связана с ее конкретной интерпретацией. Такой подход характерен для всей теории вероятностей, какой она существовала примерно до 20-х годов текущего столетия. Этот подход встретил серьезные и обоснованные возражения со стороны математиков. Однако при первоначальном знакомстве с элементами теории вероятностей всякий иной подход нецелесообразен.

3. *Событиями или случаями в теории вероятностей называют всякие явления, относительно которых имеет смысл ставить вопрос, могут они происходить или нет.* Опыт или совокупность условий, в результате которых появляется то или иное событие, в теории вероятностей называется *испытанием*.

Если при данных условиях событие обязательно произойдет, то оно называется *достоверным*. Если же оно произойти не может, то его называют *невозможным*. Допустим, например, что мы чертим треугольник на бумаге. Событие, состоящее в том, что при этом получится треугольник, у которого каждая сторона короче суммы двух других сторон, есть достоверное событие. Появление треугольника, у которого одна из сторон длиннее суммы двух других, есть также событие, хотя и невозможное.

Событие называется случайным, если в результате испытания оно может как произойти, так и не произойти. Например, при игре в орлянку может выпасть либо герб, либо решка. Это — случайные события. Положим в урну несколько занумерованных совершенно одинаковых шаров и тщательно перемешаем их. Если наугад вынуть один шар, то появление шара с определенным номером будет также случайным событием.

4. *Суммой двух событий A и B называется событие, состоящее в появлении либо события A, либо события B (без указания, какого именно)*. Так, если в урне лежат красный, зеленый и белый шары, то появление при вынимании цветного шара есть сумма двух событий: 1) появления красного шара и 2) появления зеленого шара. Сумма событий A и B обозначается $A+B$. *Произведением событий A и B называется событие, состоящее в появлении как события A, так и события B*. Так, если монета бросается два раза, то появление при первом бросании герба, а при втором решки есть произведение двух событий: 1) появления при первом бросании герба и 2) появления при втором бросании решки. Произведение событий A и B обозначается AB.

События A_1, A_2, ..., A_n называются единственно возможными, если при данном испытании одно из них (но неизвестно — какое) обязательно должно произойти. Очевидно, сумма всех единственно возможных событий есть событие достоверное. *События A_1, A_2, ..., A_n называются несовместимыми, если появление одного из них исключает появление любого из остальных*. Очевидно, произведение всех несовместимых событий есть событие невозможное. *Два случайных события называются равновозможными или равновероятными, если нет никаких оснований ожидать, что при испытаниях одно из них будет появляться чаще другого*. Например, выпадение герба и решки при бросании монеты — равновозможные события. *Несколько событий называются равновозможными, если каждые два из них равновозможны.*

5. *Вероятность случайного события есть количественная мера ожидаемой возможности его появления*. Для введения этой меры рассмотрим сначала n единственно возможных, несовместимых и равновозможных событий A_1, A_2, ..., A_n. Вероятностью каждого из них называют дробь $^1/_n$. Например, если в урне лежат 100 тщательно перемешанных одинаковых занумерованных шаров, то вероятность вынуть наугад шар с номером 1 равна $^1/_{100}$.

Распространим теперь понятие вероятности на случай, когда единственно возможные и несовместимые события A_1, A_2, ..., A_n не равновозможны, но могут быть представлены в виде суммы равновозможных событий, представляющих их частные случаи. Пусть, например, событие A_i разложено на m_i единственно возможных несовместимых и равновозможных событий A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{im_i}. Очевидно, все события A_{11}, A_{12}, ..., A_{n1}, A_{n2}, ..., A_{nm_n} будут единственно возможны, несовместимы и равновозможны. Вероятностью события A_i называют дробь

$$P(A_i)=\frac{m_i}{m_1+m_2+\ldots+m_n}. \tag{70.1}$$

Условимся называть события A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{im_i}, при которых наступает событие A_i, *благоприятными случаями для* A_i. Тогда определение вероятности, данное выше, можно формулировать следующим образом. *Вероятностью события называется отношение числа равновозможных случаев, благоприятных этому событию, к числу всех равновозможных случаев, которые могут встретиться при испытании.*

Достоверное и невозможное события можно рассматривать как предельные случаи случайных событий. Вероятность достоверного события равна единице, вероятность невозможного события — нулю.

Пример 1. В урне лежат 100 тщательно перемешанных шаров, отличающихся друг от друга только цветом: 30 белых, 25 красных и 45 зеленых. Какова вероятность вынуть белый шар? Число равновозможных случаев, которые могут встретиться при испытании, равно $30 + 25 + 45 = 100$. Число равновозможных случаев, благоприятных выниманию белого шара, есть 30. Поэтому вероятность вынуть белый шар будет $P_{\text{бел}} = 30/100 = 3/10$. Аналогично, для красных и зеленых шаров $P_{\text{кр}} = 25/100 = 1/4$, $P_{\text{зел}} = 45/100 = 9/20$.

6. Определение вероятности (70.1) предполагает, что еще до испытания имеются какие-то основания (например, соображения симметрии, однородности и пр.) оценивать равновозможность событий, а также представлять события в виде сумм равновозможных событий. Поэтому так определенную вероятность называют *априорной вероятностью,* т. е. такой вероятностью, о которой мы судим до опыта. Судить о равновозможности событий, даже в простейших случаях, не так легко, как это может показаться на первый взгляд. Приведем пример.

Пример 2. Монета бросается два раза. Какова вероятность того, что при двух бросаниях по крайней мере один раз выпадает герб? Равновозможных случаев, которые могут представиться при таком испытании (т. е. при двух бросаниях), четыре, а именно:

1) герб герб,
2) герб решка,
3) решка герб,
4) решка решка. (A)

Из них первые три благоприятны рассматриваемому событию — появлению герба по крайней мере один раз. Поэтому искомая вероятность $^3/_4$. Даламбер (1717—1783) оспаривал этот результат. Он писал, что если при первом бросании выпал герб, то второе бросание становится ненужным, так как и без того ясно, что мы имеем дело с благоприятным случаем. Поэтому вместо четырех различных возможностей, перечисленных выше, Даламбер берет только три, а именно:

1) герб,
2) решка, герб,
3) решка, решка. (A′)

Из них благоприятных два, и искомая вероятность, по Даламберу, равна $^2/_3$. Аналогично дело обстоит и при трех бросаниях. Какова вероятность того, что при трех бросаниях монеты появится герб, по крайней мере один раз? Равновозможных случаев всего восемь:

1) герб	герб	герб,	
2) герб	герб	решка,	
3) герб	решка	герб,	
4) герб	решка	решка,	(B)
5) решка	герб	герб,	
6) решка	герб	решка,	
7) решка	решка	герб,	
8) решка	решка	решка.	

Благоприятных случаев семь, и искомая вероятность равна $^7/_8$. По Даламберу же появление герба делает дальнейшие бросания уже ненужными, а потому он перечисляет только четыре различных случая, а именно:

1) герб,			
2) решка	герб,		(B′)
3) решка	решка	герб,	
4) решка	решка	решка.	

Из них благоприятных три, и искомая вероятность, по Даламберу, равна $^3/_4$. Ошибка Даламбера состоит в том, что случаи (A'), а также (B') он принял за равновозможные, тогда как в действительности они не являются таковыми.

7. Если пользоваться одним только определением вероятности (70.1), то вычисление вероятности в каждом конкретном случае требует разложения событий на равновозможные. Необходимость этого устраняется основными теоремами теории вероятностей, известными под названием *теоремы сложения* и *теоремы умножения вероятностей*.

Теорема сложения вероятностей. *Вероятность суммы несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий.*

Действительно, разложим единственно возможные и несовместимые события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на равновозможные, как это делалось при введении определения (70.1). Пусть событие B является суммой событий A_1 и A_2, т. е. состоит в появлении либо события A_1, либо события A_2 (безразлично, какого). Так как события A_1 и A_2 несовместимы, то число равновозможных случаев, благоприятных событию B, будет равно сумме равновозможных случаев, благоприятных событиям A_1 и A_2, т. е. m_1+m_2. Вероятность же события B будет

$$P(B)=\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=P(A_1)+P(A_2).$$

Таким образом, если события A_1 и A_2 несовместимы, то

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2). \tag{70.2}$$

Пример 3. Вероятность вынуть красный шар в примере 1 равна $P_{\text{кр}}= 25/100$, вероятность вынуть зеленый $P_{\text{зел}}=45/100$, вероятность вынуть цветной шар

$$P_{\text{цв}}=\frac{25+45}{1000}=P_{\text{кр}}+P_{\text{зел}}=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}.$$

Пример 4. В примере 2 вероятность события 1) из группы (A') равна 1/2, а вероятности событий 2) и 3) из той же группы равны $^1/_4$. Действительно, событие 1) из группы (A') есть сумма несовместимых равновозможных событий 1) и 2) из группы (A). Поэтому для вероятности (при двух бросаниях) появления герба хотя бы один раз мы получаем на основании теоремы сложения вероятностей

$$P=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

т. е. верный результат. Аналогично разбирается случай трех бросаний. Вероятности событий из группы (B') равны соответственно $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_8$, и для вероятности, о которой идет речь в примере 2, находим

$$P=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8},$$

т. е. снова верный результат.

Сумма вероятностей всех единственно возможных и несовместимых событий равна единице:

$$P_1+P_2+\ldots+P_n=1. \tag{70.3}$$

Это утверждение является непосредственным следствием теоремы сложения вероятностей. Действительно, так как события единственно возможны, то появление одного из них (безразлично, какого) есть событие достоверное. Вероятность такого события равна единице. С другой стороны, по теореме сложения вероятностей вероятность того же события может быть представлена суммой $P_1 + P_2 + \ldots + P_n$. В результате и получается соотношение (70.3).

Соотношение (70.3) часто называют *условием нормировки вероятности*. Вероятность в принципе можно было бы определить не выражением (70.1), а выражением, ему пропорциональным, т. е. тем же выражением, умноженным на произвольный постоянный численный коэффициент k. Тогда соотношение (70.3) не имело бы места. Только при $k = 1$ условие нормировки приводится к виду (70.3).

Если число единственно возможных несовместимых событий равно двум, то события называются противоположными. Каждому событию соответствует противоположное, состоящее в том, что первое событие не произойдет. Очевидно, сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

8. Теорема умножения вероятностей. *Вероятность произведения двух событий A и B равна произведению вероятности одного из них P (A) на вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие произошло.*

Последнюю вероятность, о которой говорится в теореме, называют *условной вероятностью события B при условии, что событие A произошло,* и обозначают P (B/A). Таким образом,

$$P(AB)=P(A)\,P(B/A). \tag{70.4}$$

Для доказательства допустим, что из n единственно возможных, несовместимых и равновозможных случаев

$$C_1, C_2, \ldots, C_l, C_{l+1}, \ldots, C_m, C_{m+1}, \ldots, C_n$$

событию A благоприятствуют первые m случаев, остальные же ему не благоприятствуют. Путь, далее, из m случаев

$$C_1, C_2, \ldots, C_l, C_{l+1}, \ldots, C_m$$

первые l случаев благоприятствуют событию B, остальные же ему не благоприятствуют. Значит, число случаев, благоприятствующих и A, и B, равно l, а потому $P(AB) = l/n$. Далее, очевидно $P(A) = m/n$. Наконец, если событие A произошло, то случаи C_{m+1}, ..., C_n становятся невозможными, а все остальные случаи C_1, C_2, ..., C_l, C_{l+1}, ..., C_m по-прежнему продолжают оставаться равновозможными. Поэтому $P(B/A) = l/m$. Таким образом,

$$P(A)\,P(B/A) = \frac{m}{n}\,\frac{l}{m} = \frac{l}{n} = P(AB),$$

что и доказывает теорему.

Располагая при доказательстве события A и B в обратном порядке, получим также

$$P(AB) = P(B)\,P(A/B). \qquad (70.5)$$

Отметим важный частный случай теоремы умножения вероятностей. Допустим, что вероятность каждого из двух событий A и B не зависит от того, произошло второе событие или не произошло. В этом случае события A и B называются *независимыми* или *статистически независимыми*. Для независимых событий

$$P(AB) = P(A)\,P(B), \qquad (70.6)$$

т. е. *вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей.*

Пример 5. В урне лежат четыре одинаковых шара, занумерованных цифрами 1, 2, 3, 4. Какова вероятность того, что при последовательном вынимании двух шаров они окажутся с номерами 1 и 2? Вынем один шар. Вероятность того, что он окажется с номером либо 1, либо 2 (событие A), равна по теореме сложения вероятностей $P(A) = {}^1/_4 + {}^1/_4 = {}^1/_2$. Если событие A произошло, то в урне останется три шара, один из которых будет иметь либо номер 1, либо 2. Вероятность вынуть шар с таким номером (событие B) равна $P(B/A) = {}^1/_3$. Искомая вероятность по теореме умножения вероятностей равна $P(AB) = {}^1/_2 \cdot {}^1/_3 = {}^1/_6$.

Проверим решение непосредственным подсчетом равновозможных случаев. Единственно возможные, несовместимые и равновозможные события в рассматриваемом примере изобразим таблицей

$\underline{12}$	$\underline{21}$	31	41
13	23	32	42
14	24	34	43

Здесь первая цифра означает номер шара при первом вынимании, а вторая — при втором. Число всех равновозможных случаев двенадцать. Из них благоприятных искомому событию — два, а именно 12 и 21 (эти случаи подчеркнуты). Искомая вероятность есть $^2/_{12} = {}^1/_6$.

Изменим теперь постановку задачи. Вынув шар и определив его номер, положим его обратно в урну и все шары тщательно перемешаем. Второе вынимание производим, следовательно, при таких же условиях, т. е. при том же количестве шаров в урне, что и первое. Теперь события A и B становятся независимыми. Вероятность $P(A)$ останется прежней, т. е. равной $^1/_2$. Найдем $P(B)$. Если при первом вынимании появился шар с номером 1 (2), то событие B состоит в том, что при втором вынимании должен появиться шар с номером 2 (1). Вероятность этого события $P(B) = {}^1/_4$. Таким образом, по теореме умножения вероятностей $P(AB) = P(A)\,P(B) = {}^1/_2 \cdot {}^1/_4 = {}^1/_8$. В правильности результата нетрудно убедиться также, написав все равновозможные случаи, которые могут встретиться, а именно:

$$\begin{array}{cccc} 11 & \underline{21} & 31 & 41 \\ \underline{12} & 22 & 32 & 42 \\ 13 & 23 & 33 & 43 \\ 14 & 24 & 34 & 44 \end{array}$$

Благоприятные случаи подчеркнуты.

9. Определение априорной вероятности может встретить и принципиальные трудности. Допустим, например, что бросается игральная кость, грани которой занумерованы цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Если кость совершенно однородна и имеет форму идеально правильного куба, то появления всех этих шести цифр при бросании будут равновозможными событиями. Но если кость неоднородна или не является правильным кубом, то этого уже не будет. Тогда хотя понятие вероятности и сохраняет смысл, однако трудно представить себе, как в этом случае различные события можно разложить на равновозможные. Надо указать какой-то другой способ, с помощью которого можно было бы, хотя бы принципиально, найти вероятность и в указанном случае. Один из способов состоит в следующем.

Допустим, что игральная кость бросается n раз и при этом грань с номером 1 выпала n_1 раз. Отношение $\nu_1 = n_1/n$ называется *относительной частотой* появления рассматриваемого события. Опыт показывает, и в этом проявляется статистическая закономерность, что при неограниченном возрастании n относительная частота ν_1 стремится к вполне определенному пределу. Априори ясно, что в случае идеальной игральной кости этот предел должен быть равен $^1/_6$, т. е. вероятности рассматриваемого события, как она была определена выше. Поэтому представляется естественным и в общем случае определить вероятность события с помощью соотношения

$$P_1 = \lim_{n\to\infty} \nu_1 \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{n_1}{n}. \tag{70.7}$$

Конечно, применимость этого определения не ограничивается случаем бросания игральной кости. Оно распространяется без всяких изменений на все случаи, когда в результате испытаний получается конечное число различных возможностей.

10. Существует еще одна интерпретация вероятности, применяющаяся в физике, вполне аналогичная (70.7). Поясним ее на простейшем примере. Пусть в закрытом сосуде имеется одна молекула. Сталкиваясь со стенками (имеющими молекулярную структуру), молекула претерпевает беспорядочные отражения от них, следующие друг за другом. При этом она побывает в различных местах сосуда. Выделим мысленно в сосуде какой-либо неподвижный объем v. Как определить вероятность нахождения молекулы в этом объеме? С этой целью будем наблюдать за молекулой в течение длительного времени T. Пусть часть времени t молекула проводит в объеме v. Отношение t/T называется относительным временем пребывания молекулы в объеме v. Предел этого отношения

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{t}{T} \tag{70.8}$$

и есть вероятность нахождения молекулы в объеме v. Статистическая закономерность проявляется опять в том, что предел (70.8) существует, как это показывает опыт.

11. Важными понятиями в теории вероятностей и ее приложениях являются понятия *среднего значения* и *математического ожидания*. Разъясним эти понятия на конкретном примере. Пусть произведено N однотипных измерений одной и той же величины a при неизменных условиях. Пусть в n_1 случаях измеренное значение величины a оказалось равным a_1, в n_2 случаях — a_2, ..., в n_m случаях — a_m $(n_1 + n_2 + \ldots + n_m = N)$. Среднее значение измеряемой величины определяется выражением

$$\langle a \rangle = \frac{n_1 a_1 + n_2 a_2 + \ldots + n_m a_m}{N} = \nu_1 a_1 + \ldots + \nu_m a_m. \tag{70.9}$$

Допустим для простоты, что никаких других результатов, кроме a_1, a_2, ..., a_m, при измерениях появиться не может, так что эти результаты являются единственно возможными и несовместимыми. Тогда, если неограниченно увеличивать число измерений N, то частоты ν_1, ν_2, ..., ν_m перейдут в свои предельные значения P_1, P_2, ..., P_m — вероятности появления при измерениях значений a_1, a_2, ..., a_m. Выражение (70.9) при этом переходит в

$$\text{Мож}\, a = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \ldots + P_m a_m. \tag{70.10}$$

Сумма (70.10) называется *математическим ожиданием величины a*.

Истинное значение измеряемой величины a, как правило, определить невозможно, так как измерения, сколь бы точны они ни были, сопровождаются ошибками. (Исключения имеют место только при счете конечного числа предметов. Например, число жителей в доме или число деревьев в саду можно сосчитать абсолютно точно.)

Систематические ошибки могут быть исключены путем тщательного изучения приборов и методов измерения. Но случайные ошибки всегда остаются. Влияние их уменьшают путем многократного повторения измерений. Идеальной целью, к которой следовало бы стремиться на этом пути, является нахождение математического ожидания измеряемой величины. Оно и представляло бы окончательный результат измерения, выдаваемый экспериментатором за истинное значение измеряемой величины. Но нахождение математического ожидания требовало бы бесконечного повторения измерений, а потому на практике вместо него приходится довольствоваться средним значением, полученным в результате как можно большего числа измерений.

Можно сказать, что математическое ожидание является пределом, к которому стремится среднее значение $\langle a\rangle$ при неограниченном возрастании числа N. Различать эти понятия крайне необходимо, когда требуется точность в рассуждениях. Однако, когда такой необходимости нет, термином «математическое ожидание» обычно не пользуются и называют средним значением как величину (70.9), так и величину (70.10).

12. Затронем попутно со всей возможной краткостью некоторые вопросы теории ошибок. Хотя непосредственно для нашего курса они не нужны, но вопрос об ошибках измерений является основным при статистической обработке результатов любых измерений. Поэтому имеет смысл на нем остановиться. Здесь речь пойдет только о *случайных ошибках.*

Ошибкой называется разность между измеренным и истинным значениями измеряемой величины. Если в результате N однотипных измерений получено N значений измеряемой величины $a_1, a_2, \ldots, a_N$, то ошибки этих отдельных измерений будут

$$x_i = a_i - a \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{70.11}$$

Для характеристики средней степени точности прибора и метода измерения применяют обычно так называемую *среднюю квадратичную ошибку отдельного измерения.* Это есть квадратный корень из среднего квадрата ошибки отдельного измерения, т. е. величина

$$\Delta_{\text{кв}} = \sqrt{\langle x^2\rangle} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2}{N}}. \tag{70.12}$$

Точное вычисление ошибок $x_1, x_2, \ldots$, а с ними и величины $\Delta_{\text{кв}}$ невозможно, так как истинное значение измеряемой величины a неизвестно. Вместо точного вычисления приходится довольствоваться вероятностной оценкой величины $\Delta_{\text{кв}}$. С этой целью введем понятие *отклонения результатов отдельных измерений от среднего значения* $\langle a\rangle$, т. е. величины

$$y_i = a_i - \langle a\rangle \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{70.13}$$

Эти отклонения удовлетворяют тождеству

$$\sum y_i = 0, \tag{70.14}$$

которое непосредственно следует из определения среднего арифметического $\langle a\rangle$. Подчеркнем здесь, что для ошибок x_i подобное равенство места не имеет. Истинное значение суммы ошибок $\sum x_i$, конечно, неизвестно. Однако если рассматриваемую серию из N измерений повторять многократно, устремляя число таких повторений к бесконечности, то можно утверждать, что математическое ожидание указанной суммы будет равно нулю:

$$\text{Мож} \sum x_i = 0. \tag{70.15}$$

В этом проявляется случайный характер ошибок.

Из (70.11) и (70.13) следует, что $x_i = y_i + \delta$, где δ — постоянная: $\delta = \langle a \rangle - a$. Она имеет смысл ошибки среднего результата. Ее точное вычисление, конечно, невозможно. Но можно дать вероятностную оценку абсолютного значения величины δ или, лучше, ее квадрата. Величина $\delta_{\text{кв}} = \sqrt{\langle \delta^2 \rangle}$ называется *средней квадратичной ошибкой среднего результата*. Ее вычисление и является главной целью теории ошибок. Возведя равенство $x_i = y_i + \delta$ в квадрат и просуммировав по всем i, получим ввиду соотношения (70.14)

$$\sum x_i^2 = \sum y_i^2 + \sum \delta^2$$

или

$$N \langle x^2 \rangle = \sum y_i^2 + N\delta^2.$$

Далее,

$$\delta = \frac{\sum a_i}{N} - a = \frac{\sum (a_i - a)}{N} = \frac{\sum x_i}{N},$$

откуда

$$N\delta^2 = \frac{1}{N} \sum x_i^2 + \frac{1}{N} \sum_{i \neq j} \sum x_i x_j.$$

Первое слагаемое в правой части существенно положительно и равно $\langle x^2 \rangle$. Что касается двойной суммы, то о ее значении сказать ничего нельзя. Можно утверждать только, что если рассматриваемую серию из N измерений повторять неограниченно, то двойная сумма с равной вероятностью будет принимать как положительные, так и отрицательные значения. Ее математическое ожидание будет равно нулю, подобно математическому ожиданию (70.15). Для вероятностной оценки среднего квадрата $\langle \delta^2 \rangle$ заменим двойную сумму $\sum \sum x_i x_j$ ее математическим ожиданием. Таким путем получим $N \langle \delta^2 \rangle = \langle x^2 \rangle$, а потому

$$N \langle x^2 \rangle = \sum y_i^2 + \langle x^2 \rangle.$$

Отсюда

$$\Delta_{\text{кв}} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{N-1}}, \tag{70.16}$$

$$\delta_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle}{N}} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{N(N-1)}} = \frac{\Delta_{\text{кв}}}{\sqrt{N}}. \tag{70.17}$$

В правые части этих формул входят только известные величины — отклонения результатов отдельных измерений от среднего значения $\langle a \rangle$. Поэтому (70.16) и (70.17) могут служить для фактического вычисления средних квадратичных ошибок $\Delta_{\text{кв}}$ и $\delta_{\text{кв}}$ или, лучше, их вероятностных оценок.

Окончательный результат измерения принято записывать в виде

$$a = \langle a \rangle \pm \delta_{\text{кв}}.$$

Величина $\delta_{\text{кв}}$ определяет число достоверных десятичных знаков, с которыми может быть получено значение измеряемой величины. Величина $\Delta_{\text{кв}}$ от числа измерений не зависит. Увеличивая число измерений, мы только уточняем значение этой величины. Поэтому $\delta_{\text{кв}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$. Для того чтобы повысить точность результата на один порядок, оставляя точность отдельных измерений неизменной, надо увеличить число измерений в 100 раз. Повышение точности на два порядка потребовало бы увеличения числа измерений в 10 000 раз. Отсюда видно, что метод многократного повторения измерений эффективен лишь при сравнительно небольших значениях N.

13. Понятие вероятности мы разъяснили применительно к случаям, когда множество различных событий, которые могут появиться при испытании, *конечно*. Но могут быть и такие случаи, когда это множество *бесконечно* и даже *непрерывно*. С такими случаями мы встречаемся, например, при измерении величин, могущих принимать непрерывный ряд значений. Можно, например, ввести вероятность dP того, что численное значение измеряемой величины, полученное в результате измерения, будет заключено в пределах от a до $a + da$. Величина этой вероятности пропорциональна ширине бесконечно узкого интервала da, так что она может быть представлена в виде

$$dP = \rho(a)\, da,$$

причем коэффициент пропорциональности ρ, вообще говоря, зависит от a. Функция $\rho(a)$ называется *плотностью вероятности*. Условие нормировки (70.3) принимает вид

$$\int \rho(a)\, da = 1, \tag{70.18}$$

а формула (70.10) для математического ожидания переходит в

$$\text{Мож}\, a = \int a\rho(a)\, da. \tag{70.19}$$

Интегралы берутся по всем значениям, которые может принимать a. Однако во всех случаях в качестве пределов интегрирования можно поставить $-\infty$ и $+\infty$, считая, что вне области изменения a плотность вероятности $\rho(a)$ равна нулю.

§ 71. Распределение скоростей молекул газа. Постановка задачи

1. В состоянии статистического равновесия все направления скоростей молекул газа при тепловом движении равновероятны. Если бы это было не так, то тепловое движение газа не было бы вполне беспорядочным. Абсолютные величины всех скоростей молекул в том же состоянии также не могут быть одинаковыми. Даже если бы случайно они и оказались одинаковыми в какой-то момент времени, то в дальнейшем такое состояние быстро нарушилось бы из-за столкновений молекул между собой. Рассмотрим, например, простейшую модель газа, состоящую из идеально упругих и гладких шариков, взаимодействующих между собой лишь в моменты столкновений. Допустим, что столкнулись молекулы *1* и *2*, скорости которых до столкновения $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ были взаимно перпендикулярны (рис. 49). Первая молекула двигалась вдоль линии центров *12*,