

увеличить число измерений в 100 раз. Повышение точности на два порядка потребовало бы увеличения числа измерений в 10 000 раз. Отсюда видно, что метод многократного повторения измерений эффективен лишь при сравнительно небольших значениях N .

13. Понятие вероятности мы разъяснили применительно к случаям, когда множество различных событий, которые могут появиться при испытании, конечно. Но могут быть и такие случаи, когда это множество бесконечно и даже непрерывно. С такими случаями мы встречаемся, например, при измерении величин, могущих принимать непрерывный ряд значений. Можно, например, ввести вероятность dP того, что численное значение измеряемой величины, полученное в результате измерения, будет заключено в пределах от a до $a + da$. Величина этой вероятности пропорциональна ширине бесконечно узкого интервала da , так что она может быть представлена в виде

$$dP = \rho(a) da,$$

причем коэффициент пропорциональности ρ , вообще говоря, зависит от a . Функция $\rho(a)$ называется *плотностью вероятности*. Условие нормировки (70.3) принимает вид

$$\int \rho(a) da = 1, \quad (70.18)$$

а формула (70.10) для математического ожидания переходит в

$$\text{Мож } a = \int a \rho(a) da. \quad (70.19)$$

Интегралы берутся по всем значениям, которые может принимать a . Однако во всех случаях в качестве пределов интегрирования можно поставить $-\infty$ и $+\infty$, считая, что вне области изменения a плотность вероятности $\rho(a)$ равна нулю.

§ 71. Распределение скоростей молекул газа.

Постановка задачи

1. В состоянии статистического равновесия все направления скоростей молекул газа при тепловом движении равновероятны. Если бы это было не так, то тепловое движение газа не было бы вполне беспорядочным. Абсолютные величины всех скоростей молекул в том же состоянии также не могут быть одинаковыми. Даже если бы случайно они и оказались одинаковыми в какой-то момент времени, то в дальнейшем такое состояние быстро нарушилось бы из-за столкновений молекул между собой. Рассмотрим, например, простейшую модель газа, состоящую из идеально упругих и гладких шариков, взаимодействующих между собой лишь в моменты столкновений. Допустим, что столкнулись молекулы 1 и 2, скорости которых до столкновения v_1 и v_2 были взаимно перпендикулярны (рис. 49). Первая молекула двигалась вдоль линии центров 12,

вторая — перпендикулярно к ней. Так как шары — абсолютно гладкие, то касательные составляющие их скоростей в результате столкновения не изменятся. Однако шары, как известно из элементарной теории удара, должны обменяться нормальными скоростями. После столкновения первый шар остановится, скорость второго получит приращение $\Delta v_2 = v'_1$, т. е. обратится в $v'_2 = v_2 + v_1$. Она изобразится диагональю параллелограмма, построенного на век-

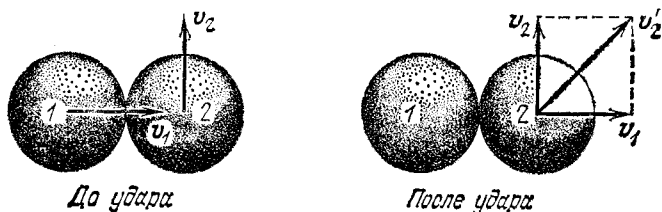


Рис. 49.

торах v_1 и v_2 . Если $v_1 = v_2$, то $v'_2 = v_1 \sqrt{2}$. Этот пример показывает, что при столкновениях меняются не только направления движения молекул, но и абсолютные значения их скоростей. Рассмотренное столкновение является только одним из возможных. На самом деле столкновения бесконечно разнообразны. Они сопровождаются всевозможными изменениями скоростей и приводят в конце концов к вполне определенному статистическому распределению молекул по скоростям.

2. Задача о распределении молекул газа по скоростям была поставлена и решена Максвеллом в 1859 г. Уясним сначала постановку задачи. Допустим, что в закрытом сосуде содержится очень большое число N молекул газа и что внешних силовых полей, действующих на газ, нет.

Примем произвольную точку пространства O за начало координат (рис. 50). Отложим от нее в какой-то момент времени t векторы скоростей всех молекул газа: v_1, v_2, \dots, v_N . Концы этих векторов называются *скоростными* или *изображающими точками*. Совокупность всех скоростных точек образует трехмерное пространство, называемое *пространством скоростей*. В нем можно ввести прямоугольные оси. Координатами скоростной точки являются проекции v_x, v_y, v_z вектора v на эти оси. Задание скоростей всех молекул газа эквивалентно заданию положения их скоростных точек в пространстве скоростей. С чисто динамической точки зрения задача о распределении скоростей молекул сводится к определению положения скоростных точек в пространстве скоростей в любой момент времени. Но, как уже указывалось в § 9, для систем с колоссальным числом молекул в такой динамической

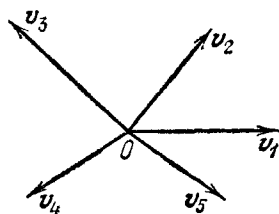


Рис. 50.

постановке задача не разрешима и не представляет интереса. Распределение молекул по скоростям должно рассматриваться как статистическая задача. Ее можно формулировать следующим образом.

3. Возьмем в пространстве скоростей физически бесконечно малый элемент объема, имеющий, например, форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами dv_x , dv_y , dv_z и с центром в точке v_x , v_y , v_z . Объем этого параллелепипеда равен $d\omega = dv_x dv_y dv_z$, число скоростных точек в нем обозначим dN . Из-за взаимодействия молекул меняются их скорости. На геометрическом языке это означает, что скоростные точки одних молекул уходят из элемента объема $d\omega$, скоростные точки других молекул — вступают в него. Число скоростных точек dN внутри объема $d\omega$, таким образом, не сохраняется постоянным. Если элемент $d\omega$ выбрать очень малым, то в нем окажется мало скоростных точек. Может случиться, например, что в одни моменты времени в объеме $d\omega$ окажется одна или две скоростных точки, а в другие моменты — ни одной. Число скоростных точек dN , таким образом, будет резко и нерегулярно меняться от одного момента времени к другому. Во избежание этого надо объем $d\omega$ выбрать достаточно большим, чтобы в нем находилось еще очень много скоростных точек. Тогда в установившемся состоянии числа dN будут меняться относительно мало, колеблясь вокруг некоторого среднего значения $\langle dN \rangle$, а поведение самих средних значений $\langle dN \rangle$ будет подчиняться определенным статистическим закономерностям, которые мы и должны установить. Но объем $d\omega$ в то же время должен быть настолько малым, чтобы распределение скоростных точек в пространстве скоростей было описано достаточно детально, и настолько малым, чтобы с величинами dv_x , dv_y , dv_z , а также $d\omega$ и dN можно было обращаться как с бесконечно малыми дифференциалами. Обоим требованиям удастся удовлетворить практически всегда благодаря колоссальности чисел молекул, содержащихся в газах.

4. Отношение $Nf(\mathbf{v}) = \frac{\langle dN \rangle}{d\omega}$ имеет смысл средней концентрации скоростных точек в пространстве скоростей и вполне аналогично концентрации частиц в обычном (координатном) пространстве. Величина $f(\mathbf{v})$ называется *функцией распределения молекул по скоростям*. Она может быть интерпретирована как плотность вероятности распределения скоростных точек молекул в пространстве скоростей. К определению функции $f(\mathbf{v})$ и сводится статистическая задача о распределении скоростей молекул. Если величину dN или $\langle dN \rangle$ проинтегрировать по всему скоростному пространству, то в результате, очевидно, получится полное число молекул N . Отсюда следует условие нормировки

$$\int f(\mathbf{v}) d\omega = 1, \quad (71.1)$$

которому должна удовлетворять функция $f(\mathbf{v})$.

В дальнейшем мы будем иметь дело только со средними числами $\langle dN \rangle$, а не с мгновенными значениями dN . Поэтому для сокращения письма знак усреднения $\langle \rangle$ обычно будет опускаться. Иными словами, в дальнейшем всюду под dN будет пониматься среднее или вероятное значение этого числа, т. е. $\langle dN \rangle$.

По смыслу функции распределения величина

$$dN = Nf(\mathbf{v}) d\omega = Nf(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \quad (71.2)$$

дает среднее число молекул, компоненты скоростей которых лежат между v_x и $v_x + dv_x$, v_y и $v_y + dv_y$, v_z и $v_z + dv_z$ соответственно. Функция распределения $f(\mathbf{v})$ меняется непрерывно и плавно с изменением скорости \mathbf{v} . Она описывает не истинное, а только *сглаженное, среднее* или *вероятное* распределение молекул по скоростям. Это видно из того, что истинное число скоростных точек в любом элементе $d\omega$ скоростного пространства может быть только целым. Величина же dN , определяемая выражением (71.2), может принимать любые вещественные значения.

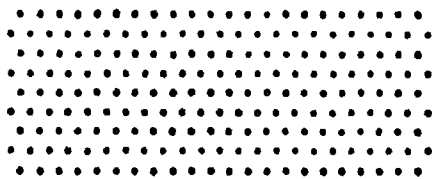
При статистической постановке задачи не имеет также смысла спрашивать, сколько молекул газа имеют вполне определенную скорость \mathbf{v} с компонентами v_x, v_y, v_z . Речь может идти только о среднем числе dN молекул в элементе объема скоростного пространства $d\omega = dv_x dv_y dv_z$. При стремлении $d\omega$ к нулю стремится к нулю и число dN . Таким образом, среднее число молекул со строго определенной скоростью \mathbf{v} равно нулю. Это станет очевидным, если заметить, что множество всех векторов \mathbf{v} , т. е. всех точек скоростного пространства бесконечно, тогда как полное число молекул газа N конечно. По той же причине равно нулю среднее число молекул со строго определенным направлением вектора скорости.

5. Для лучшего уяснения статистического характера задачи о распределении скоростей молекул может служить демонстрационный прибор, называемый *доской Гальтона*. Это — доска, с передней стороны прикрытая стеклом, в которую в шахматном порядке достаточно часто вбиты гвозди (рис. 51). Внизу под гвоздями установлены равноотстоящие вертикальные перегородки из металлических пластинок. Они делят пространство между доской и стеклом на равные объемы, называемые ниже для краткости *ячейками*. Вверху над гвоздями в средней части доски помещена воронка, в которую можно сыпать песок, зерна пшени, или другие частицы. Если бросить в воронку одну частицу, то при падении вниз она испытает много столкновений с гвоздями и в конце концов попадет в одну из ячеек. В какую ячейку попадет частица — это предсказать невозможно из-за множества случайных факторов, влияющих на ее движение. Можно говорить лишь о вероятности попадания частицы в ту или другую ячейку. Естественно ожидать, что попадание частицы в центральные ячейки более вероятно, чем в крайние. И действительно, если через воронку частицы сыпать непрерывно, то оказывается, что в центральные ячейки, находящиеся под отверстием воронки, попадает частиц больше всего, а в крайние — меньше всего. При очень большом количестве частиц, прошедших через воронку, вырисовывается вполне определенная статистическая закономерность распределения их по ячейкам. Эту закономерность можно даже представить в пределе аналитической формулой. С этой целью соединим плавной кривой вершины столбиков, которые образуют

частицы в ячейках. Оказывается, что при очень большом числе частиц кривая асимптотически приближается к кривой вида

$$y = \varphi(x) \equiv Ae^{-\alpha x^2}, \quad (71.3)$$

где A и α — положительные постоянные. Из них постоянная α зависит только от параметров прибора, но не зависит от числа частиц. Постоянная A пропорциональна числу частиц и связана с постоянной α условием нормировки.



y

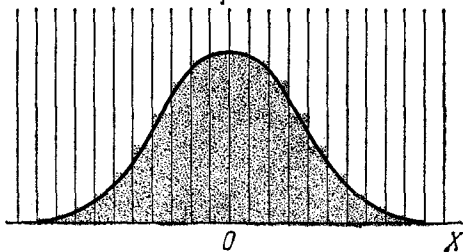


Рис. 51.

6. Формула (71.3) выражает так называемый *нормальный закон ошибок Гаусса* (1777—1855), а соответствующая ей кривая называется *кривой ошибок Гаусса*. Величина $\varphi(x) dx$ дает вероятность того, что при измерении будет сделана ошибка, заключенная в пределах от x до $x + dx$. Конечно, при такой интерпретации плотность вероятности $\varphi(x)$ должна быть нормирована условием

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx &\equiv \\ &\equiv A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = 1, \end{aligned} \quad (71.4)$$

с помощью которого постоянную A можно выразить через постоянную α (см. задачу 2 к § 72). Чем больше α , тем более острым будет максимум на кривой ошибок, тем точнее измерения.

Поэтому постоянная α должна быть связана со средней квадратичной или средней арифметической ошибками, характеризующими точность измерения (см. задачу 3 к § 72). Что касается доказательства закона ошибок Гаусса (71.3), то оно может быть проведено аналогично тому, как в следующем параграфе доказывается закон распределения скоростей Максвелла.

7. Задача о распределении молекул газа по скоростям, как она сформулирована выше, а также методы решения ее, приводимые дальше, являются чисто *классическими*. Поэтому необходимо прежде всего выяснить границы применимости такого классического рассмотрения. Если не обращать внимания на малосущественные численные коэффициенты порядка единицы, то ответ можно получить из наглядных соображений, хотя бы с помощью *принципа неопределенности Гайзенберга* (род. 1901). Выделим в газе маленький кубик со сторонами x, y, z , на который в среднем приходится одна частица. Если выполнены условия

$$xp_x \gg h, \quad yp_y \gg h, \quad zp_z \gg h,$$

то движение частицы в этом кубике можно рассматривать классически. Действительно, согласно принципу неопределенности Гайзенберга, произведение квантовых неопределенностей координаты и импульсы частицы порядка h , а потому при соблюдении указанных условий эти неопределенности существенной роли не играют. Перемножив эти три неравенства, можно заменить их одним: $Vp^3 \gg h^3$, где $V = xyz$ — объем кубика, а p — некоторый средний импульс, характеризующий движение частиц газа. Если n — число частиц в единице объема, то $Vn = 1$, так что предыдущее соотношение принимает вид $n(h/p)^3 \ll 1$. Величина

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (71.5)$$

имеет размерность длины. Она называется *длиной волны де-Бройля* (род. 1892) и играет исключительно важную роль в квантовой механике. С введением λ условие применимости классического рассмотрения газа принимает вид

$$n\lambda^3 \ll 1. \quad (71.6)$$

Оно означает, что среднее число частиц газа в объеме λ^3 должно быть мало по сравнению с единицей.

Для оценки порядка величины λ воспользуемся какой-либо средней скоростью, характеризующей тепловое движение молекул газа. Пока в нашем распоряжении есть только одна из таких скоростей, а именно средняя квадратичная скорость $\bar{v}_{кв} = \sqrt{3kT/m}$ (см. § 60). Используя ее, придадим условию (71.6) вид

$$T \gg T_g, \quad (71.7)$$

где введено обозначение

$$T_g = \frac{h^2}{3km} n^{2/3}.$$

Величина T_g называется *температурой вырождения* газа. Таким образом, *классический способ рассмотрения применим при температурах, значительно превышающих температуру вырождения*. При более строгом рассмотрении за температуру вырождения принимают величину

$$T_g = \frac{h^2}{2km} \left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{2/3}. \quad (71.8)$$

Она примерно втрое меньше предыдущего выражения. Газы ниже температуры вырождения называются *вырожденными*. К ним классический способ рассмотрения не применим.

Вычислим температуру вырождения для двух крайних случаев. Для электронного газа в серебре $n \approx 6 \cdot 10^{22}$ см⁻³, масса электрона $m = 9,11 \cdot 10^{-28}$ г. По формуле (71.8) получаем для электронного газа в серебре $T_g \approx 6,5 \cdot 10^4$ К. Подобные же значения получаются для всех других хорошо проводящих металлов. При таких высоких

температурах ни один металл в твердом состоянии существовать не может. Отсюда следует, что электронный газ в хорошо проводящих металлах всегда полностью вырожден. Возьмем теперь другой крайний случай — гелий. Масса атома гелия $m = 6,6 \cdot 10^{-24}$ г, а концентрация при нормальных условиях $n = 2,7 \cdot 10^{19}$ см⁻³. Вычисление по формуле (71.8) дает $T_g = 0,05$ К. У всех остальных газов (за исключением водорода) масса атомов еще больше, а следовательно, T_g ниже, чем у гелия (концентрация n при нормальных условиях одна и та же для всех идеальных газов). При столь низких температурах ни одно вещество не может находиться в газообразном состоянии. Поэтому все молекулярные газы достаточно далеки от вырождения, и их не только можно, но и следует рассматривать как классические системы.

§ 72. Закон распределения скоростей Максвелла

1. Изложим теперь рассуждения Максвелла, которые привели его в 1859 г. к открытию закона распределения молекул газа по скоростям. Пусть газ состоит из очень большого числа N тождественных молекул, находящихся в состоянии беспорядочного теплового движения при определенной температуре. Предполагается, что силовые поля, действующие на газ, отсутствуют. Какова вероятность того, что x -составляющая скорости молекулы лежит между v_x и $v_x + dv_x$, а остальные две составляющие могут быть какими угодно? Ясно, что эта вероятность должна быть пропорциональна ширине рассматриваемого скоростного интервала dv_x , а коэффициент пропорциональности зависит от величины v_x . Обозначим эту вероятность $\varphi(v_x) dv_x$. Величина $\varphi(v_x)$ также называется *функцией распределения*. Однако она характеризует распределение молекул не по полной скорости \mathbf{v} , а только по ее проекции v_x на ось X . Величина $f(\mathbf{v})$ имеет смысл *объемной* или *трехмерной функции распределения* в пространстве скоростей, величина $\varphi(v_x)$ — *одномерной* или *линейной функции распределения* в том же пространстве.

Аналогично, величина $\varphi(v_y) dv_y$ будет вероятностью того, что y -составляющая скорости молекулы заключена между v_y и $v_y + dv_y$, а составляющие v_x и v_z могут быть какими угодно. Ввиду полного равноправия всех направлений скоростей функция φ будет той же самой, что и в предыдущем случае, но от другого аргумента v_y . Наконец, $\varphi(v_z) dv_z$ есть вероятность того, что z -составляющая скорости молекулы лежит между v_z и $v_z + dv_z$, причем остальные составляющие v_x и v_y могут быть какими угодно.

2. Назовем ради краткости попадания молекулы в скоростные интервалы $(v_x, v_x + dv_x)$, $(v_y, v_y + dv_y)$, $(v_z, v_z + dv_z)$, о которых шла речь выше, событиями A , B , C соответственно. Определим вероятность $f(\mathbf{v}) d\omega$ того, что молекула попадает в элемент объема скоростного пространства $d\omega = dv_x dv_y dv_z$. Такое попадание есть