

температурах ни один металл в твердом состоянии существовать не может. Отсюда следует, что электронный газ в хорошо проводящих металлах всегда полностью вырожден. Возьмем теперь другой крайний случай — гелий. Масса атома гелия  $m = 6,6 \cdot 10^{-24}$  г, а концентрация при нормальных условиях  $n = 2,7 \cdot 10^{19}$  см<sup>-3</sup>. Вычисление по формуле (71.8) дает  $T_g = 0,05$  К. У всех остальных газов (за исключением водорода) масса атомов еще больше, а следовательно,  $T_g$  ниже, чем у гелия (концентрация  $n$  при нормальных условиях одна и та же для всех идеальных газов). При столь низких температурах ни одно вещество не может находиться в газообразном состоянии. Поэтому все молекулярные газы достаточно далеки от вырождения, и их не только можно, но и следует рассматривать как классические системы.

## § 72. Закон распределения скоростей Максвелла

1. Изложим теперь рассуждения Максвелла, которые привели его в 1859 г. к открытию закона распределения молекул газа по скоростям. Пусть газ состоит из очень большого числа  $N$  тождественных молекул, находящихся в состоянии беспорядочного теплового движения при определенной температуре. Предполагается, что силовые поля, действующие на газ, отсутствуют. Какова вероятность того, что  $x$ -составляющая скорости молекулы лежит между  $v_x$  и  $v_x + dv_x$ , а остальные две составляющие могут быть какими угодно? Ясно, что эта вероятность должна быть пропорциональна ширине рассматриваемого скоростного интервала  $dv_x$ , а коэффициент пропорциональности зависит от величины  $v_x$ . Обозначим эту вероятность  $\varphi(v_x) dv_x$ . Величина  $\varphi(v_x)$  также называется *функцией распределения*. Однако она характеризует распределение молекул не по полной скорости  $\mathbf{v}$ , а только по ее проекции  $v_x$  на ось  $X$ . Величина  $f(\mathbf{v})$  имеет смысл *объемной* или *трехмерной функции распределения* в пространстве скоростей, величина  $\varphi(v_x)$  — *одномерной* или *линейной функции распределения* в том же пространстве.

Аналогично, величина  $\varphi(v_y) dv_y$  будет вероятностью того, что  $y$ -составляющая скорости молекулы заключена между  $v_y$  и  $v_y + dv_y$ , а составляющие  $v_x$  и  $v_z$  могут быть какими угодно. Ввиду полного равноправия всех направлений скоростей функция  $\varphi$  будет той же самой, что и в предыдущем случае, но от другого аргумента  $v_y$ . Наконец,  $\varphi(v_z) dv_z$  есть вероятность того, что  $z$ -составляющая скорости молекулы лежит между  $v_z$  и  $v_z + dv_z$ , причем остальные составляющие  $v_x$  и  $v_y$  могут быть какими угодно.

2. Назовем ради краткости попадания молекулы в скоростные интервалы  $(v_x, v_x + dv_x)$ ,  $(v_y, v_y + dv_y)$ ,  $(v_z, v_z + dv_z)$ , о которых шла речь выше, событиями  $A$ ,  $B$ ,  $C$  соответственно. Определим вероятность  $f(\mathbf{v}) d\omega$  того, что молекула попадает в элемент объема скоростного пространства  $d\omega = dv_x dv_y dv_z$ . Такое попадание есть

сложное событие, являющееся произведением событий  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Его вероятность можно определить по теореме умножения вероятностей. Для этого надо вероятность события  $A$  умножить на условную вероятность события  $B$  при условии, что событие  $A$  произошло, а затем результат умножить на условную вероятность события  $C$  при условии, что произошли события  $A$  и  $B$ . Максвелл ввел предположение, что события  $A$ ,  $B$ ,  $C$  *независимы*. Тогда указание условий при которых должны вычисляться вероятности событий  $B$  и  $C$ , становится не нужным, и теорему умножения вероятностей можно применять в ее простейшей форме, какую она принимает для независимых событий. Это предположение, а с ним и первый вывод закона распределения скоростей, данный Максвеллом, подверглись критике со стороны некоторых математиков и физиков. Указывалось, в частности, что скорости молекул после столкновения не могут быть независимыми от их скоростей до столкновения, поскольку эти скорости связаны между собой законами сохранения энергии и импульса. Однако дальнейшие исследования самого Максвелла, Больцмана и других ученых показали, что предположение Максвелла правильно, хотя и нуждается в обосновании. Мы примем его пока без обоснований. По сравнению с другими доказательствами, данными самим Максвеллом, а затем Больцманом, первое доказательство Максвелла обладает тем преимуществом, что оно не вводит никаких специальных представлений относительно структуры молекул и сил взаимодействия между ними. Поэтому оно применимо не только к газам, но и к жидкостям и к твердым телам. Требуется только выполнение условия (71.7), чтобы задачу о распределении скоростей молекул можно было трактовать классически.

Итак, мы принимаем, что вероятность того, что скоростная точка молекулы одновременно окажется внутри трех интервалов  $(v_x, v_x + dv_x)$ ,  $(v_y, v_y + dv_y)$ ,  $(v_z, v_z + dv_z)$ , должна выражаться произведением

$$\varphi(v_x) \varphi(v_y) \varphi(v_z) dv_x dv_y dv_z.$$

Но для той же вероятности мы писали  $f(\mathbf{v}) d\omega$ , где  $d\omega = dv_x dv_y dv_z$ . Сравнивая оба выражения, находим, что функция распределения  $f(\mathbf{v})$  должна иметь вид

$$f(\mathbf{v}) = \varphi(v_x) \varphi(v_y) \varphi(v_z). \quad (72.1)$$

3. Положительные и отрицательные направления координатных осей в газе совершенно эквивалентны. Поэтому должно быть  $\varphi(v_x) = \varphi(-v_x)$ . Значит, функция  $\varphi$  может зависеть только от модуля или, что то же самое, от квадрата скорости  $v_x$ . Точно так же, ввиду изотропии газа функция  $f$  может зависеть только от квадрата полной скорости  $\mathbf{v}$ , но не от ее направления. Вместо квадратов скоростей удобнее взять в качестве аргументов соответствующие кинетические энергии:  $\varepsilon_x = \frac{1}{2}mv_x^2$ ,  $\varepsilon_y = \frac{1}{2}mv_y^2$ ,  $\varepsilon_z = \frac{1}{2}mv_z^2$ .

$\varepsilon = 1/2mv^2 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ . При переходе к новым аргументам сами функции условимся обозначать прежними буквами  $\varphi$  и  $f$ , хотя это — аналитически совсем другие функции. Уравнение (72.1) запишется в виде

$$\varphi(\varepsilon_x) \varphi(\varepsilon_y) \varphi(\varepsilon_z) = f(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), \quad (72.2)$$

причем оно справедливо, каковы бы ни были (положительные) значения аргументов  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ .

4. Функциональным уравнением (72.2) и определится вид функции  $\varphi$ , а с ней и функции  $f$ . Действительно, рассмотрим такие изменения аргументов  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ , которые удовлетворяют двум условиям: 1)  $\varepsilon_z = \text{const}$ , 2)  $\varepsilon_x + \varepsilon_y = \text{const}$ . При таких условиях уравнение (72.2) все еще остается верным. Из него следует, что

$$\varphi(\varepsilon_x) \varphi(\varepsilon_y) = \text{const}$$

при условии

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \text{const}.$$

Логарифмируя, а затем дифференцируя первое соотношение, получим

$$\frac{\varphi'(\varepsilon_x)}{\varphi(\varepsilon_x)} d\varepsilon_x + \frac{\varphi'(\varepsilon_y)}{\varphi(\varepsilon_y)} d\varepsilon_y = 0$$

при условии

$$d\varepsilon_x + d\varepsilon_y = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\varphi'(\varepsilon_x)}{\varphi(\varepsilon_x)} = -\frac{\varphi'(\varepsilon_y)}{\varphi(\varepsilon_y)}.$$

При выводе предполагалось, что изменения аргументов  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  связаны условием  $\varepsilon_x + \varepsilon_y = C = \text{const}$ . Однако значения постоянной  $C$ , а с ней и аргументов  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  могут быть какими угодно. Поэтому условие  $\varepsilon_x + \varepsilon_y = \text{const}$  фактически не накладывает никаких ограничений на значения, которые могут принимать аргументы  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$ . Значит, в предыдущем соотношении  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  могут независимо принимать любые значения. Но слева стоит функция только  $\varepsilon_x$ , а справа — только  $\varepsilon_y$ . Равенство между ними возможно тогда и только тогда, когда отношения  $\frac{\varphi'(\varepsilon_x)}{\varphi(\varepsilon_x)}$  и  $\frac{\varphi'(\varepsilon_y)}{\varphi(\varepsilon_y)}$  равны одной и той же постоянной. Обозначив эту постоянную —  $\alpha$ , получим

$$\frac{\varphi'(\varepsilon_x)}{\varphi(\varepsilon_x)} = \frac{\varphi'(\varepsilon_y)}{\varphi(\varepsilon_y)} = -\alpha,$$

или

$$\frac{d\varphi(\varepsilon_x)}{\varphi(\varepsilon_x)} = -\alpha d\varepsilon_x.$$

Интегрирование дает

$$\varphi(\varepsilon_x) = A_1 e^{-\alpha \varepsilon_x}, \quad \varphi(\varepsilon_y) = A_1 e^{-\alpha \varepsilon_y}, \quad \varphi(\varepsilon_z) = A_1 e^{-\alpha \varepsilon_z}, \quad (72.3)$$

где  $A_1$  — новая постоянная, значение которой будет определено ниже. Что касается постоянной  $\alpha$ , то она должна быть положительной, так как в противном случае  $\varphi(\varepsilon_x)$  неограниченно возрастала бы при неограниченном возрастании кинетической энергии  $\varepsilon_x$ , что физически невозможно.

5. Для функции распределения  $f(\varepsilon) = f(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$  из (72.3) получаем

$$f(\varepsilon) = Ae^{-\alpha\varepsilon}, \quad (72.4)$$

причем  $A = A_1^3$ . Эта формула, отличающаяся исключительной простотой, и выражает максвелловский закон распределения скоростей. Для того чтобы придать ему окончательный вид, необходимо еще определить постоянные  $A$  и  $\alpha$ . Для этого проще начать не с функции  $f$ , а с функции  $\varphi$ . Последняя функция в зависимости от скорости  $v_x$  представлена на рис. 52. Она тождественна с гауссовой кривой ошибок. Площадь элементарной полоски, заштрихованной на рисунке, дает вероятность того, что  $x$  — составляющая скорости молекулы лежит внутри интервала  $(v_x, v_x + dv_x)$ , а умноженная на  $N$ , она дает вероятное число молекул со скоростями в том же интервале. Функция  $\varphi(v_x)$  должна быть нормирована условием

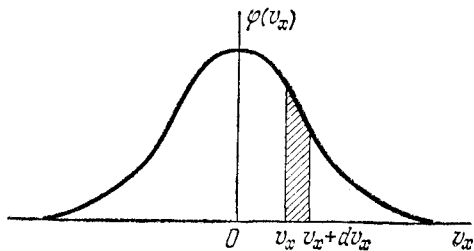


Рис. 52.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v_x) dv_x \equiv A_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha m v_x^2}{2}} dv_x = 1. \quad (72.5)$$

Интегрирование в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$  не означает, что в газе есть молекулы с бесконечно большими скоростями. В действительности при достаточно больших скоростях формулы (72.3) и (72.4) становятся неприменимыми. Кинетическая энергия молекулы  $\varepsilon$  не может превосходить кинетической энергии всего газа  $K$ . Поэтому при  $\varepsilon > K$  формула (72.4) заведомо не имеет смысла. Но она становится неприменимой уже при много меньших значениях  $\varepsilon$ , когда перестают выполняться условия, накладываемые на элементы объема скоростного пространства  $d\omega$ , необходимые для введения самого понятия функции распределения (см. § 71, пункт 3). Интегрирование в бесконечных пределах следует рассматривать только как вычислительный прием. Он возможен потому, что молекул со скоростями, удовлетворяющими условию  $\alpha m v_x^2 \gg 1$ , очень мало, и такие молекулы практически не вносят никакого вклада в нормировочный интеграл (72.5). Значение этого интеграла практически

не изменится, если истинное распределение молекул по скоростям заменить экспоненциальным (72.3) не только в области его применимости, но и при больших скоростях, где оно не действительно. Это и сделано в формуле (72.5).

Введем в качестве переменной интегрирования величину  $\xi = \sqrt{\alpha m/2} v_x$ . Тогда условие (72.5) примет вид

$$A_1 \sqrt{\frac{2}{\alpha m}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 1. \quad (72.6)$$

Входящий сюда интеграл называется интегралом Пуассона. В курсах математического анализа доказывается, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}. \quad (72.7)$$

С использованием этого результата получаем

$$A_1 = \sqrt{\frac{m\alpha}{2\pi}}. \quad (72.8)$$

6. Задача свелась к вычислению одной только постоянной  $\alpha$ . Для этого замечаем, что средняя кинетическая энергия  $\langle \epsilon_x \rangle$  теплового движения вдоль оси  $X$  выражается через функцию распределения  $\varphi$  соотношением

$$\langle \epsilon_x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_x \varphi(\epsilon_x) dv_x,$$

или более подробно

$$\langle \epsilon_x \rangle = A_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{mv_x^2}{2} e^{-\frac{\alpha mv_x^2}{2}} dv_x.$$

Введем прежнюю переменную интегрирования  $\xi$ . Тогда получим

$$\langle \epsilon_x \rangle = \frac{A_1}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{\alpha m}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi.$$

Интегрированием по частям находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi = -1/2 [\xi e^{-\xi^2}]_{-\infty}^{+\infty} + 1/2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Первое слагаемое в правой части обращается в нуль, так как при  $\xi \rightarrow \infty$  показательная функция  $e^{-\xi^2}$  стремится к нулю быстрее, чем стремится к бесконечности любая степень  $\xi$ . В результате получаем

$$\langle \epsilon_x \rangle = \frac{A_1}{2\alpha} \sqrt{\frac{2}{\alpha m}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi,$$

или учитывая (72.6),  $\langle \epsilon_x \rangle = 1/2 \alpha$ . (Заметим, что для получения этого результата знания интеграла Пуассона (72.7) не требуется.) Но по определению кинетической температуры  $\langle \epsilon_x \rangle = 1/2 \Theta = 1/2 kT$ . Это дает

$$\alpha = \frac{1}{kT}, \quad (72.9)$$

$$A_1 = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}, \quad A = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}. \quad (72.10)$$

В результате для функций распределения  $\varphi(v_x)$  и  $f(v)$  окончательно получаем

$$\varphi(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{e v_x}{kT}}, \quad (72.11)$$

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{e v}{kT}}, \quad (72.12)$$

или более подробно

$$\varphi(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}}, \quad (72.13)$$

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m v^2}{2kT}}. \quad (72.14)$$

Это и есть окончательная формула, выражающая максвелловский закон распределения скоростей. Она применима не только к газам, но и к жидкостям и к твердым телам во всех случаях, когда еще можно пользоваться классическим способом описания движения.

## ЗАДАЧИ

1. Применяя метод Максвелла, с помощью которого были выведены формулы (72.3), получить формулу (71.3), определяющую распределение частиц по ячейкам в демонстрационном опыте с доской Гальтона. С этой целью рассмотреть двухмерную доску Гальтона с ячейками, имеющими форму прямоугольных параллелепипедов, боковые грани которых параллельны координатным плоскостям  $XZ$  и  $YZ$ . Аналогичным путем получить закон ошибок Гаусса.

2. В законе ошибок Гаусса (71.4) выразить постоянную  $A$  через постоянную  $\alpha$ .

О т в е т.

$$A = \sqrt{\alpha/\pi}.$$

3. Выразить через  $\alpha$  среднюю и среднюю квадратичную ошибки при гауссовом законе распределения ошибок. Найти связь между этими ошибками.

О т в е т.

$$\langle |x| \rangle = 1/\sqrt{\pi\alpha}, \quad \Delta_{\text{кв}} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = 1/2\alpha,$$

$$\Delta_{\text{кв}} = \sqrt{\pi/2} \langle |x| \rangle. \quad (72.15)$$

Непосредственное вычисление  $\langle x^2 \rangle$  довольно кропотливо и требует большой затраты времени. Последняя формула сводит вычисление этой величины к вычислению  $\langle |x| \rangle$ , что значительно проще. Такой прием целесообразно применять, например, при обработке результатов наблюдения броуновского движения (см. § 64).