§ 73. Распределение молекул по абсолютным значениям скорости. Средние скорости молекул

1. Функция $f(\varepsilon)$ имеет смысл *объемной плотности вероятности*, с какой скоростные точки молекул газа распределены по пространству скоростей. Умноженная на полное число молекул N, она дает среднее или вероятное число скоростных точек в единице объема скоростного пространства.

Найдем теперь *распределение молекул газа по абсолютным значениям их скоростей*. Направления скоростей нас больше не интересуют. Надо найти вероятность того, что абсолютное значение скорости молекулы заключено между v и $v + dv$. Эту вероятность будем обозначать $F(v)\,dv$. Умноженная на N, она дает вероятное число молекул dN с такими скоростями. Новая функция распределения $F(v)$ просто связана с ранее введенной функцией $f(\varepsilon)$. Будем откладывать от одной и той же точки 0 векторы скоростей всех молекул газа. Из них отберем векторы с длинами, заключенными между v и $v + dv$. Соответствующие скоростные точки лежат внутри бесконечно тонкого шарового слоя со средним радиусом v и толщиной dv. Объем этого слоя $d\omega = 4\pi v^2\,dv$. Объемная плотность $f(\varepsilon)$ внутри шарового слоя постоянна, так как она зависит только от абсолютного значения скорости v, но не от ее направления. Умножив ее на объем слоя $d\omega$, находим искомую вероятность $f(\varepsilon)\,d\omega = 4\pi v^2 f(\varepsilon)\,dv$. Но для той же вероятности ранее мы писали $F(v)\,dv$. Сравнивая оба выражения, получаем

$$F(v) = 4\pi v^2 f(\varepsilon), \tag{73.1}$$

или

$$F(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}. \tag{73.2}$$

Значит,

$$dN = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\,dv. \tag{73.3}$$

Ясно, что функция $F(v)$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^\infty F(v)\,dv = 1. \tag{73.4}$$

Этими формулами и решается поставленная задача.

2. График функции $F(v)$ представлен на рис. 53. Кривая $F(v)$ асимметрична и проходит через нуль в начале координат. Напротив, кривая $\varphi(v_x)$, как мы видели, симметрична и в начале координат проходит через максимум. Легко видеть, в чем причина этого различия. Выражение $\varphi(v_x)\,dv_x$ дает вероятность попадания молекулы в бесконечно тонкий плоский слой скоростного пространства между плоскостями $v_x = \text{const}$ и $v_x + dv_x = \text{const}$. Выражение $F(v)\,dv$ есть

также вероятность попадания молекулы в бесконечно тонкий слой, но сферический, заключенный между двумя концентрическими сферами $v = \text{const}$ и $v + dv = \text{const}$. Если фиксировать толщину dv_x, то все плоские слои будут одинаковыми, каково бы ни было значение v_x. Естественно, что выражение $\varphi(v_x)\,dv_x$, а с ним и функция $\varphi(v_x)$ максимальны в центре, т. е. при $v_x = 0$. Напротив, при фиксированной толщине сферических слоев dv их объемы возрастают с возрастанием v благодаря наличию множителя $4\pi v^2$ в выражении $d\omega = 4\pi v^2 f(v)\,dv$. Ввиду этого положение максимума на кривой $F(v) = 4\pi v^2 f(v)$ определяется произведением конкурирующих множителей: монотонно убывающего $f(v)$ и монотонно возрастающего v^2.

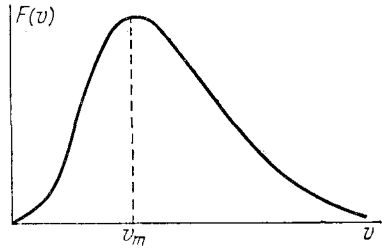

Рис. 53.

Следующая аналогия полезна для уяснения указанного различия между функциями $\varphi(v_x)$ и $F(v)$. Допустим, что производится стрельба по мишеням. Попадание пули в то или иное место мишени есть случайное событие, а потому распределение пробоин в мишени подчиняется законам случая. Если мишень разделить на одинаковые вертикальные полоски (рис. 54), то, как и в опыте с доской Гальтона, распределение вероятности попадания в них представится симметричной кривой $\varphi(x)$. Если же мишень разделить на кольца равной толщины, то площади их будут возрастать с возрастанием радиуса, а распределение вероятности попадания в кольца представится асимметричной кривой, напоминающей кривую рис. 53.

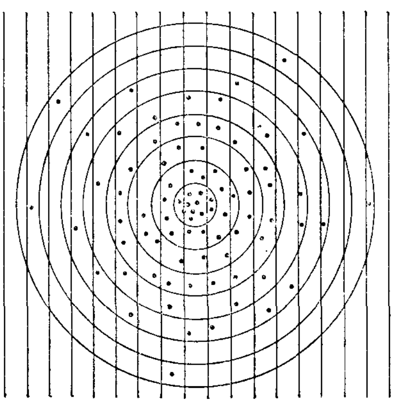
Рис. 54.

3. Величина скорости, при которой функция $F(v)$ максимальна, называется *наиболее вероятной скоростью*. Будем обозначать ее v_m. Для нахождения v_m величину F лучше рассматривать как функцию аргумента v^2. Дифференцируя (73.2) по указанному аргументу и приравнивая результат нулю, получим

$$\frac{d}{dv^2}\left[v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\right] = \left[1 - \frac{mv^2}{2kT}\right] e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = 0,$$

откуда

$$v \equiv v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \qquad (73.5)$$

Средняя или средняя арифметическая скорость молекулы определяется обычной формулой

$$\langle v\rangle = \frac{1}{N}\int v\,dN = \int_0^\infty vF(v)\,dv.$$

Подставляя сюда значение $F(v)$ и интегрируя, получим

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = v_m\sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1{,}13v_m. \tag{73.6}$$

Добавим сюда еще среднюю квадратичную скорость, определяющую среднюю кинетическую энергию молекулы $^1/_2m\langle v^2\rangle = {}^1/_2mv_{\text{кв}}^2 = {}^3/_2kT$ (см. § 62). Эта скорость равна

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \approx 1{,}22v_m. \tag{73.7}$$

Эти три скорости отличаются друг от друга численными множителями порядка единицы, причем $v_{\text{кв}} > \langle v\rangle > v_m$. Поэтому каждая из них может быть использована для общего представления о скоростях теплового движения молекул.

ЗАДАЧИ

1. Написать выражение для среднего числа dN молекул газа, кинетические энергии которых заключены между ε и $\varepsilon+d\varepsilon$.

Ответ. $dN = 2\pi N(\pi kT)^{-3/2}\sqrt{\varepsilon}\,e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\,d\varepsilon$.

2. Найти среднее значение обратной величины скорости молекулы в газе.

Ответ. $\left\langle\frac{1}{v}\right\rangle = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} = \frac{4}{\pi\langle v\rangle}$.

3. Найти среднее число молекул, компоненты скорости которых, параллельные некоторой оси, лежат в интервале $(v_{||},\ v_{||}+dv_{||})$, а абсолютные значения перпендикулярной составляющей скорости заключены между $v_\perp$ и $v_\perp+dv_\perp$.

Решение. Искомое число молекул dN равно среднему числу скоростных точек в элементе объема пространства скоростей, заключенном между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами $v_\perp$ и $v_\perp+dv_\perp$ и высотой $dv_{||}$. Объем этого элемента равен $d\omega = 2\pi v_\perp dv_\perp dv_{||}$, а среднее число скоростных точек в нем

$$dN = f\,d\omega = 2\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\,v_\perp dv_\perp dv_{||}.$$

4. В диоде электроны, эмитируемые накаленным катодом, попадают в задерживающее поле анода. До анода доходят лишь достаточно быстрые электроны. Считая, что тепловые скорости эмитируемых электронов (вышедших из катода) распределены по закону Максвелла с температурой $T = 1150$ K, определить долю электронов α, преодолевающих задерживающий потенциал: 1) $V = 0{,}2$ В; 2) $V = 0{,}4$ В. Катодом является тонкая прямолинейная нить, натянутая по оси цилиндрического анода.

Ответ. $\alpha = \exp\left(-\frac{eV}{kT}\right)$, где e — заряд электрона (по абсолютной величине). 1) $\alpha = 13{,}5\%$, 2) $\alpha = 1{,}8\%$.