

но и поперечные скорости, к ней перпендикулярные. Доказательство применимо и в этом случае, так как поперечные скорости при столкновении не изменяются. Только вместо двумерных областей D и D' появятся соответствующие области в *шестимерном пространстве*. Теорема состоит в том, что объемы этих шестимерных областей одинаковы. Наконец, все рассуждения останутся верными, если импульсы p и p_1 заменить соответствующими им скоростями.

§ 75. Среднее число молекул, сталкивающихся со стенкой сосуда

1. Среднее число ударов молекул о стенку сосуда в единицу времени можно оценить следующим простым способом. Пусть n — среднее число молекул в единице объема. Рассмотрим на стенке сосуда элементарную площадку dS и введем прямоугольную координатную систему XYZ (рис. 58). Ось X направим по нормали к площадке dS , оси Y и Z расположим в плоскости, перпендикулярной к этой нормали.

Введем два упрощающих предположения: 1) скорости всех молекул одинаковы по величине; 2) молекулы движутся только параллельно координатным осям, а именно так, что одна шестая всех молекул движется в положительном направлении оси X , одна шестая — в отрицательном и аналогично для осей Y и Z . При таких упрощениях с площадкой dS будут сталкиваться только молекулы, движущиеся к стенке, т. е. в положительном направлении оси X . Число таких молекул в единице объема $n_x = 1/6n$. За время dt

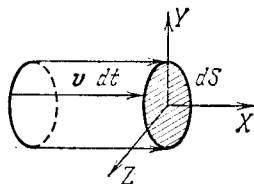


Рис. 58.

с площадкой dS столкнутся все молекулы рассматриваемой группы, которые лежат внутри цилиндра с основанием dS и высотой $v dt$. Число молекул в этом цилиндре, движущихся к стенке, равно $dz = n_x v dS dt = 1/6 n v dS dt$. Среднее число молекул, сталкивающихся в единицу времени с единичной площадкой, будет

$$z = 1/6 n v, \quad (75.1)$$

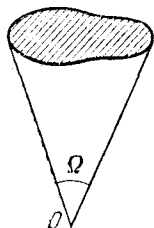


Рис. 59.

2. Найдем теперь точное выражение для среднего числа ударов z . В газе в состоянии покоя все направления скоростей молекул равновероятны, т. е. распределены в пространстве изотропно. Найдем среднее число N_Ω молекул, направления скоростей которых лежат в пределах телесного угла Ω (рис. 59). Так как телесный угол, охватывающий все направления в пространстве, равен 4π , то ввиду указанной изотропии

$$N_\Omega = \frac{N}{4\pi} \Omega, \quad (75.2)$$

где N — общее число молекул. В частности, для бесконечно малого телесного угла

$$dN = \frac{N}{4\pi} d\Omega. \quad (75.3)$$

Пользуясь формулой (75.3), определим среднее число молекул dN , скорости которых образуют с некоторым фиксированным направлением OA (рис. 60) углы, лежащие между ϑ и $\vartheta + d\vartheta$. Для этого опишем сферу радиуса R с центром в точке O и построим два прямых круговых конуса с общей осью OA , образующие которых составляют с этой осью углы ϑ и $\vartheta + d\vartheta$. Конусы вырежут на сфере кольцевую полоску, заштрихованную на рис. 60. Площадь полоски равна $dS = 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta$. Она видна из точки O под телесным углом $d\Omega = dS/R^2 = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$. Подставляя это значение в формулу (75.3), получим

$$dN = \frac{N}{2} \sin \vartheta d\vartheta. \quad (75.4)$$

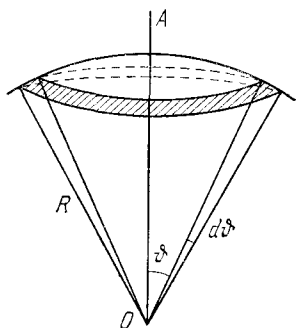


Рис. 60.

Теперь легко найти выражение для z . Внешнюю нормаль к стенке примем за ось X (рис. 61). Угол между осью X и скоростью молекулы обозначим ϑ . Сначала предположим, что скорости всех молекул одинаковы по величине, а их направления распределены изотропно. Выделим группу молекул с x -компонентами скоростей между v_x и $v_x + dv_x$. Чтобы удариться о стенку, молекулы должны лететь к ней, а потому должно быть $v_x > 0$. Пусть dn — число таких молекул в единице объема. Число ударов о квадратный сантиметр стенки, производимых молекулами выделенной группы в одну секунду, равно $dz = dn v_x = v \cos \vartheta dn$. В этом легко убедиться, если произвести еще более детальную сортировку молекул по скоростям. Надо выделить молекулы с определенным направлением скорости и на площадке dS построить косоугольный параллелепипед с боковой стороной $v dt$, как указано на рис. 61. Число ударов выделенных молекул о площадку dS за время dt найдется, если их концентрацию умножить на объем параллелепипеда $dS v_x dt$. Затем надо просуммировать по всем параллелепипедам, имеющим разные направления боковых сторон, но общую высоту $v_x dt$. Разделив результат на dt , мы и придем к выражению $dz = v \cos \vartheta dn$. Поскольку молекулы из числа dn характеризуются общими значениями v и v_x , они движутся под определенным углом к оси X . Точнее, это

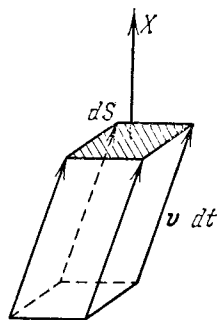


Рис. 61.

есть молекулы, скорости которых образуют с направлением оси X углы между ϑ и $\vartheta + d\vartheta$. По формуле (75.4) $dn = \frac{1}{2}n \sin \vartheta d\vartheta$, а потому

$$dz = \frac{1}{2}nv \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta.$$

Интегрируя это выражение по всем молекулам, летящим к стенке, т. е. в пределах от $\vartheta = 0$ до $\vartheta = \pi/2$, получим

$$z = nv/4.$$

Не составляет труда обобщить этот результат на случай, когда скорости молекул не одинаковы по величине, но их направления по-прежнему распределены изотропно. Разобьем все молекулы на группы со скоростями v_1, v_2, \dots, v_s . Пусть n_1, n_2, \dots, n_s означают числа таких молекул в единице объема. Очевидно,

$$z = \frac{1}{4} \sum n_i v_i.$$

По определению среднего

$$\langle v \rangle = \frac{\sum n_i v_i}{n},$$

а потому

$$z = \frac{1}{4} n \langle v \rangle. \tag{75.5}$$

При максвелловском распределении скоростей для $\langle v \rangle$ следует воспользоваться выражением (73.6). Это дает

$$z = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}. \tag{75.6}$$

3. Таким образом, отличие приближенной формулы (75.1) от точной (75.5) состоит только в том, что вместо коэффициента $\frac{1}{6}$ надо брать коэффициент $\frac{1}{4}$. На самом деле различие еще меньше. Действительно, чтобы значение кинетической энергии газа получилось правильным, под v в формуле (75.1) следует понимать среднюю квадратичную скорость, связанную с $\langle v \rangle$ соотношением $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 1,08 \langle v \rangle$.

В рассмотренной задаче получение точного выражения (75.5) не представляло большого труда. Но, как правило, задачи, которые приходится ставить и решать в кинетической теории газов, очень сложны. Их точные и строгие решение получить очень трудно и часто даже невозможно. Поэтому очень большое значение приобретают соотношения оценочного характера. При их выводе вводятся упрощающие предположения, сильно облегчающие вычисления и в то же время не затрагивающие существенные черты явлений. Обычно такого рода оценочные соотношения отличаются от точных выражений малосущественными численными множителями порядка единицы. Метод оценок в дальнейшем нами будет широко применяться.

4. С помощью формулы (75.6) можно оценить среднее число молекул, вылетающих в одну секунду при испарении с единицы поверхности жидкости или твердого тела, граничащей с вакуумом. Для этого сначала рассмотрим случай, когда тело граничит со своим насыщенным паром. При наличии пара идет не только испарение, но и обратный процесс конденсации молекул пара, летящих к поверхности тела. Молекулы, летящие из тела в область, занятую паром, или обратно, могут претерпеть отражение на границе тела. Но при оценках этим эффектом можно пренебречь. Если пар насыщенный, то имеет место детальное равновесие, при котором каждому потоку испаряющихся молекул от тела соответствует равный и противоположно направленный поток молекул пара к телу. Но среднее число молекул пара, ударяющихся о единицу поверхности тела, дается выражением (75.6). Таково же будет и среднее число молекул, вылетающих ежесекундно с единицы поверхности тела. Это число не изменится, если весь пар над телом удалить, так как оно зависит только от состояния самого тела, а не от состояния окружающей среды. Под n в формуле (75.6) следует понимать число молекул насыщенного пара в единице объема. На этом основан метод измерения давления насыщенных паров тугоплавких металлов (см. задачу 10 к этому параграфу).

ЗАДАЧИ

1. Число ударов молекул о квадратный сантиметр стенки в одну секунду можно представить интегралом $z = n \int v_x \varphi(v_x) dv_x$, где интегрирование производится по всем молекулам, летящим к стенке. (Предполагается, что стенка перпендикулярна к оси X .) Убедиться непосредственным расчетом, что при максвелловском распределении скоростей этот интеграл приводится к выражению (75.6).

2. В тонкостенном сосуде объема V , стенки которого поддерживаются при постоянной температуре, находится идеальный газ. Сосуд помещен в вакуум. Как будет меняться с течением времени концентрация молекул n газа внутри сосуда, если в его стенке сделать очень малое отверстие площади S *)?

Решение. Если отверстие S очень мало, то распределение скоростей искажится очень мало, т. е. останется изотропным и максвелловским. По формуле (75.5) получаем

$$d(Vn) = - \frac{1}{4} S n \langle v \rangle dt.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$n = n_0 e^{-t/\tau}, \text{ где } \tau = 4V/S \langle v \rangle.$$

3. Откачанный тонкостенный сосуд, стенки которого поддерживаются при постоянной температуре, погружен в атмосферу идеального газа с постоянной концентрацией молекул n_0 , поддерживаемого при той же температуре. Как будет меняться с течением времени концентрация молекул газа внутри сосуда, если в его стенке сделать очень малое отверстие?

*) В задачах 2, 3, 4, 5, 7, 8 предполагается, что размеры отверстия и толщина стенки малы по сравнению с длиной свободного пробега (см. §§ 86 и 95).

Ответ. $n = n_0 (1 - e^{-t/\tau})$. Обозначения такие же, как и в предыдущей задаче.

4. Полностью эвакуированный герметический сосуд помещен в атмосферу, состоящую из смеси двух газов, молекулярные веса которых относятся как 1 : 4, а отношение концентраций (т. е. чисел молекул в единице объема) равно α . Смесь газов вне сосуда поддерживается при постоянных давлении и температуре. В стенке сосуда оказалось малое отверстие, через которое оба газа стали очень медленно натекают в сосуд. Определить максимальное и минимальное значения отношения концентрации легкого к концентрации тяжелого компонентов газовой смеси в сосуде и моменты времени, когда достигаются эти значения.

Решение. Поступая, как в задачах 1 и 2, для отношения концентраций легкого и тяжелого компонентов внутри сосуда найдем выражение

$$\beta = \alpha \frac{1 - e^{-t/\tau_1}}{1 - e^{-t/\tau_2}},$$

где индекс 1 относится к легкому, а индекс 2 — к тяжелому компонентам. Времена τ_1 и τ_2 связаны соотношением $\tau_2/\tau_1 = 2$. Учитывая его, найдем, что производная $d\beta/dt$ обращается в нуль, когда

$$e^{-t/\tau_2} = \sqrt{2} - 1,$$

и следовательно, когда $\beta = \alpha \sqrt{2}$. Однако этому случаю соответствует не максимум и не минимум на кривой $\beta = \beta(t)$, а точка перегиба. Максимальное и минимальное значения величина β принимает на концах временного интервала $(0, \infty)$. При $t = 0$ получается максимум $\beta_{\text{макс}} = \alpha \tau_2/\tau_1 = 2\alpha$, при $t = \infty$ — минимум $\beta_{\text{мин}} = \alpha$.

5. Полностью эвакуированный тонкостенный герметический сосуд помещен в атмосферу кислорода, поддерживаемого при постоянной температуре и невысоком давлении P . В стенке сосуда оказалось малое отверстие, через которое окружающий кислород стал натекает в сосуд. Через час давление газа в сосуде повысилось от нуля до $P/2$. Какое давление было бы в том же сосуде через то же время, если бы после откачки сосуд был помещен в атмосферу водорода при тех же давлении и температуре?

Ответ. $15/16 P$.

6. Найти полную кинетическую энергию E молекул идеального одноатомного газа, ударяющихся о квадратный сантиметр стенки в единицу времени.

Ответ. $E = 1/8 mn \langle v^3 \rangle$. Для максвелловского распределения

$$E = n \sqrt{\frac{2k^3 T^3}{m\pi}} = \frac{nm\pi}{16} \langle v \rangle^3.$$

7. В тонкостенном сосуде, помещенном в вакууме, имеется очень малое отверстие, на которое извне направляется параллельный пучок одноатомных молекул, летящих с одной и той же скоростью v_0 , перпендикулярной к площади отверстия. Концентрация молекул в пучке равна n_0 . Найти в установившемся равновесном состоянии среднюю скорость $\langle v \rangle$, концентрацию молекул n и температуру T газа в сосуде.

Решение. Из-за столкновений молекул со стенками сосуда и между собой внутри сосуда устанавливается максвелловское распределение скоростей. Условия сохранения числа частиц и кинетической энергии газа в сосуде имеют вид

$$n_0 v_0 = \frac{1}{4} n \langle v \rangle,$$

$$1/2 n_0 m v_0^3 = 1/16 n m \pi \langle v \rangle^3.$$

Используя их, а также формулу (73.6), находим

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} v_0, \quad n = n_0 \sqrt{\frac{8\pi}{\pi}}, \quad T = \frac{mv_0^2}{4k}.$$

8. В тонкостенном сосуде, содержащем одноатомный идеальный газ при температуре T , имеется очень маленькое отверстие, через которое молекулы вылетают в вакуум. Определить среднее значение $\langle \varepsilon \rangle$ кинетической энергии вылетевшей молекулы в предположении, что за время опыта изменения числа молекул и температуры газа в сосуде пренебрежимо малы.

О т в е т. $\langle \varepsilon \rangle = 2kT$.

9. Определить, какая часть молекул идеального газа, столкнувшись со стенкой сосуда за определенное время (например, за одну секунду), имеет кинетическую энергию, превосходящую ε .

О т в е т. $\alpha = \left(1 + \frac{\varepsilon}{kT}\right) e^{-\varepsilon/kT}$.

10. Вольфрамовая нить, испаряясь в высокий вакуум при температуре $T = 2000$ К, уменьшается в весе, как показали измерения, со скоростью $q = 1,14 \cdot 10^{-13}$ г·с⁻¹·см⁻². Оценить давление насыщенного пара вольфрама при этой температуре.

Р е ш е н и е. На основании изложенного в пункте 4 этого параграфа скорость испарения дается формулой

$$q = \frac{1}{4} nm \langle v \rangle,$$

где n — концентрация атомов насыщенного пара вольфрама. Его давление будет

$$P = \frac{1}{3} nm \langle v^2 \rangle = \frac{4}{3} q \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle}.$$

При максвелловском распределении

$$\frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle} = 3 \sqrt{\frac{\pi kT}{8m}} = 3 \sqrt{\frac{\pi RT}{8A}},$$

где A — атомный вес, равный для вольфрама 184. Окончательно получаем

$$P = q \sqrt{\frac{2\pi RT}{A}}.$$

Подставив сюда численные значения, найдем для давления насыщенных паров вольфрама при $T = 2000$ К: $P = 8,6 \cdot 10^{-9}$ дин/см² = $6,4 \cdot 10^{-12}$ мм рт. ст. Ввиду малости этой величины ее трудно измерить прямым методом.

§ 76. Опытная проверка закона распределения скоростей Максвелла

1. Одна из первых проверок закона распределения скоростей Максвелла была осуществлена Ричардсоном (1879 — 1959) в 1921 г. Если раскаленная поверхность металла граничит с вакуумом, то она испускает электроны. Это явление называется *термоэлектронной эмиссией* и имеет разнообразнейшие научно-технические применения. В состоянии статистического равновесия над поверхностью металла образуется насыщенный пар из электронов. Ричардсон показал экспериментально, что распределение скоростей электронов пара подчиняется закону Максвелла. Это объясняется тем, что