

вопроса. Пусть имеются два города A и B , причем числу жителей определенного возраста города A соответствует удвоенное число жителей того же возраста города B . Ясно, что средний возраст жителей в обоих городах будет один и тот же.

ЗАДАЧИ

1. Теплоизолированный сосуд с идеальным газом подвешен на нити в поле тяжести. Из-за действия силы тяжести плотность газа внизу сосуда больше, чем наверху. Нить пережигают, и сосуд свободно падает. Предполагая, что во время падения успевает установиться термодинамическое равновесие, определить равновесную температуру газа, которая в нем установится при падении.

Решение. Температура газа не изменится. При свободном падении газ находится в состоянии невесомости. Начальное состояние его неравновесное — плотность сверху меньше, чем внизу. Однако средняя кинетическая энергия молекул всюду одинакова. При переходе в равновесное состояние плотности выравняются. Но полная кинетическая энергия молекул газа, определяющая его температуру, останется неизменной. Опыт аналогичен известному опыту Гей-Люссака с расширением газа в пустоту (см. § 19).

2. Найти среднюю потенциальную энергию $\langle \epsilon_p \rangle$ молекулы газа в земной атмосфере, считая последнюю изотермической (с температурой T), а поле тяжести однородным. Вычислить теплоемкость газа c при этих условиях.

Ответ. $\langle \epsilon_p \rangle = kT$, $c = c_p$.

3. Теплоизолированный герметический цилиндрический сосуд высоты H , наполненный газом, подвешен в вертикальном положении в однородном поле тяжести. Температура газа в сосуде везде одинакова и равна T . Найти среднюю потенциальную энергию молекулы газа $\langle \epsilon_p \rangle$.

$$\text{Ответ. } \langle \epsilon_p \rangle = \frac{1 - \left(1 + \frac{mgH}{kT}\right) e^{-\frac{mgH}{kT}}}{1 - e^{-\frac{mgH}{kT}}} kT.$$

4. В цилиндре предыдущей задачи помещен моль идеального газа с молекулярным весом μ . Найти теплоемкость этого газа, учитывая влияние поля тяжести и предполагая, что $\mu gH \ll RT$.

$$\text{Ответ. } C = C_V + \frac{R}{12} \left(\frac{\mu gH}{RT}\right)^2.$$

5. Цилиндр радиуса R и длины H , наполненный химически однородным газом, равномерно вращается в однородном поле тяжести вокруг своей геометрической оси с угловой скоростью ω . Найти распределение концентрации молекул газа внутри цилиндра, если его ось направлена вертикально.

Ответ. Число молекул dN с координатами между r и $r + dr$, z и $z + dz$ равно

$$dN = \frac{Ng \left(\frac{m\omega}{kT}\right)^2}{\left(1 - e^{-\frac{mgH}{kT}}\right) \left(e^{\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}} - 1\right)} e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}} r dr \cdot e^{-\frac{mgz}{kT}} dz,$$

где N — общее число молекул в сосуде. Ось Z направлена вертикально вверх.

§ 78. Работы Перрена по определению числа Авогадро

1. В § 64 уже говорилось о работах Перрена по определению числа Авогадро N и проверке основных положений молекулярно-кинетической теории вещества путем наблюдения поступательного

броуновского движения. Перрену же принадлежит другой метод измерения числа N , по существу также использующий броуновское движение. Этот второй метод основан на законе распределения Больцмана (77.3). В поле тяжести этот закон принимает вид

$$n = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}. \quad (78.1)$$

Если бы была известна масса молекулы m , то измеряя распределение плотности газа по высоте, можно было бы по формуле (78.1) вычислить постоянную Больцмана k , а затем и число Авогадро $N = R/k$. Но измерить массу молекулы не менее трудно, чем постоянную k . Эту трудность можно преодолеть, если заметить, что роль молекул могут играть достаточно малые, но макроскопические частицы. В поле тяжести такие гигантские «макромолекулы» не могут все лежать на дне сосуда. Они должны совершать броуновское движение и вести себя подобно идеальному газу с очень большим молекулярным весом, концентрация которого распределена по высоте согласно формуле Больцмана. «Макромолекулы» должны быть очень велики, чтобы экспериментально можно было измерить их массу. Но в таком случае их концентрация с высотой будет убывать настолько быстро, что получится состояние, практически не отличимое от того, когда все «макромолекулы» лежат на дне сосуда. Перрен нашел способ преодоления и этой трудности. Надо поместить частицы-макромолекулы в жидкость, плотность которой немного меньше плотности вещества самих частиц. Тогда поле тяжести будет сильно ослаблено архимедовой подъемной силой и возникнет «атмосфера» из макромолекул, распределение концентрации в которой может быть измерено. В установившемся состоянии концентрация частиц определяется законом Больцмана (77.3). При вычислении потенциальной энергии надо учесть, что поднятие частицы сопровождается опусканием такого же объема жидкости. Величина ϵ_p в рассматриваемом случае равна потенциальной энергии частицы в поле тяжести mgz за вычетом потенциальной энергии жидкости $m_{\text{ж}}gz$, которую она вытесняет, т. е. $\epsilon_p = (m - m_{\text{ж}})gz$, где m — масса частицы, а $m_{\text{ж}}$ — масса вытесненной ею жидкости. Таким образом,

$$n = n_0 e^{-\frac{(m - m_{\text{ж}})gz}{kT}}. \quad (78.2)$$

Если n_1 и n_2 — измеренные концентрации частиц на высотах z_1 и z_2 , то по этой формуле получаем

$$k = \frac{(m - m_{\text{ж}})(z_2 - z_1)g}{T \ln(n_1/n_2)}. \quad (78.3)$$

2. Одна из трудностей состояла в получении взвешенных частиц совершенно одинакового размера и формы. Перрен пользовался

частицами гуммигута и мастики. Растирая гуммигут в воде, Перрен получал эмульсию ярко-желтого цвета, в которой при наблюдении в микроскоп можно было различить множество зернышек сферической формы. Вместо механического растирания Перрен обрабатывал также гуммигут или мастику спиртом, растворяющим эти вещества. При разбавлении такого раствора большим количеством воды получалась эмульсия из таких же сферических зернышек, что и при механическом растирании гуммигута. Для отбора зернышек совершенно одинакового размера Перрен подвергал взвешенные в воде частицы многократному центрифугированию и таким путем получал весьма однородную эмульсию, состоящую из шарообразных частиц с радиусом порядка микрометра. Обработав 1 кг гуммигута, Перрен получил через несколько месяцев

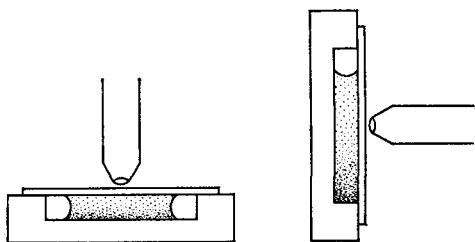


Рис. 67.

фракцию, содержащую несколько дециграммов зерен желаемого размера. С этой фракцией и были выполнены описываемые здесь опыты, а также опыты по броуновскому движению, о которых говорилось в § 64.

3. При изучении эмульсии надо было производить измерения при ничтожных разностях высот — всего в нескольких сотых миллиметра. Поэтому распределение концентрации частиц по высоте исследовалось с помощью микроскопа. К предметному стеклу микроскопа (рис. 67) приклеивалось очень тонкое стекло с просверленным в нем широким отверстием. Таким путем получалась плоская ванночка (кювета Цейсса), высота которой была около 100 мкм (0,1 мм). В центре ванночки помещалась капля эмульсии, которая тотчас сплющивалась покровным стеклом. Чтобы избежать испарения, края покровного стекла покрывались парафином или лаком. Тогда препарат можно было наблюдать в течение нескольких дней или даже недель. Препарат помещался на столике микроскопа, тщательно установленного в горизонтальном положении. Возможны два способа наблюдения. В первом способе препарат помещается вертикально, а микроскоп — горизонтально; во втором — препарат горизонтально, а микроскоп вертикально. Перрен пользовался обоими способами, но все количественные измерения были выполнены по второму способу. Объектив был очень сильного увеличения с малой глубиной фокуса, так что одновременно можно было видеть только частицы, находящиеся внутри очень тонкого горизонтального слоя с толщиной порядка микрометра. Частицы совершали интенсивное броуновское движение.

Фокусируя микроскоп на определенный горизонтальный слой эмульсии, можно было сосчитать число частиц в этом слое. Затем микроскоп фокусировался на другой слой и снова считалось число видимых броуновских частиц. Таким путем можно было определить отношение концентраций n_1/n_2 на разных высотах. Разность высот измерялась микрометрическим винтом микроскопа.

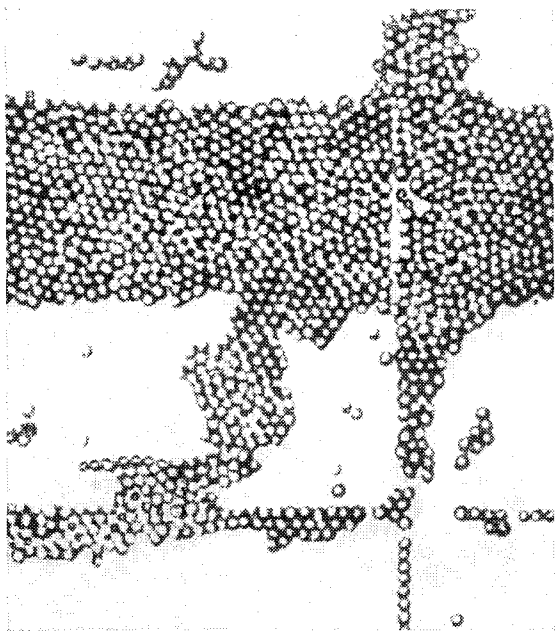


Рис. 68.

4. Масса частицы m и масса вытесненной ею воды $m_{ж}$ вычислялись по размерам частицы и плотности гуммигута (мастики). Размеры частиц нельзя было определить прямым методом, рассматривая отдельную частицу в микроскоп, так как диаметры частиц были порядка или меньше длины световой волны. При этих условиях размеры изображения заметно увеличиваются из-за дифракции света. Однако влияние этого источника ошибок сильно уменьшится, если измерить длину ряда, составленного из известного и достаточного большого числа зернышек, вплотную примыкающих друг к другу. Перрен помещал на предметном столике микроскопа капельку сильно разведенной эмульсии, не покрытой покровным стеклом. Когда испарение почти кончилось, зернышки сбегались под действием сил поверхностного

натяжения и собирались местами в довольно правильные ряды, как это видно из рис. 68, заимствованного из работы Перрена. Сосчитав число зернышек, вытянутых вдоль прямой линии известной длины, или число зернышек, соприкасающихся друг с другом на известной площади, легко вычислить диаметр отдельного зернышка. Таким путем с лучшей из своих эмульсий Перрен получил для диаметра зернышка около 0,37 мкм. Кроме этого способа для измерения диаметра частиц, Перрен применил еще два способа, которые мы не описываем. Все они привели к согласованным результатам.

5. Таким образом, все величины, входящие в правую часть формулы (78.3), могут быть измерены экспериментально. После этого можно вычислить постоянную Больцмана k и число Авогадро N . Результаты Перрена оказались в согласии с другими методами измерения тех же постоянных. Описанные опыты Перрена, как и примыкающие к ним опыты по броуновскому движению, просты в идейном отношении. Но их фактическое осуществление требует громадного труда и большого экспериментального искусства. Эти классические опыты были выполнены в 1908—1911 гг. и имели большое значение для утверждения идей атомистики.

§ 79. Распределение Больцмана и атмосферы планет

1. Применим закон распределения Больцмана к уединенной планете, окруженной газовой атмосферой. Последнюю будем считать изотермической. Кроме того, будем предполагать, что все молекулы одинаковы. Это предположение не лишает наши рассуждения общности, поскольку каждый газ (если его рассматривать как идеальный), входящий в состав атмосферы, ведет себя независимо от остальных газов. Будем считать, что масса атмосферы пренебрежимо мала по сравнению с массой планеты. Тогда потенциальная энергия молекулы в поле тяготения планеты будет равна $-GMm/r$. Для концентрации молекул n на расстоянии r от центра планеты закон Больцмана (77.3) дает

$$n = n_0 e^{\frac{GMm}{kTr}}, \quad (79.1)$$

где M — масса планеты, а G — гравитационная постоянная. Если бы формула (79.1) была применима на всех расстояниях от планеты, то на бесконечности получилось бы конечное значение для концентрации n , а именно $n = n_0$. Но это невозможно, так как общее количество молекул в атмосфере планеты конечно, а объем пространства, окружающего ее, бесконечно велик. Равновесие возможно только при $n_0 = 0$, т. е. при полном отсутствии атмосферы.

2. Невозможность равновесного состояния планетной атмосферы связана с тем, что потенциальная энергия молекулы в поле тяготения планеты в бесконечности остается конечной. Приняв ее за нуль, можно сказать, что молекула при отсутствии столкновений совершала бы *инфинитное* движение, если бы ее полная энергия была положительна (см. т. I, § 57). Такие молекулы (а они всегда появляются в результате столкновений) не могут удерживаться полем тяготения планеты. Поэтому к планетной атмосфере в целом неприменима формула Больцмана (77.3), так как ее вывод предполагал, что газ находится в состоянии термодинамического равновесия. Пусть в некоторый момент скорости молекул в атмосфере распределены по закону Максвелла. Если бы с этого момента молекулы перестали сталкиваться между собой, испытывая лишь упругие столкновения