

натяжения и собирались местами в довольно правильные ряды, как это видно из рис. 68, заимствованного из работы Перрена. Сосчитав число зернышек, вытянутых вдоль прямой линии известной длины, или число зернышек, соприкасающихся друг с другом на известной площади, легко вычислить диаметр отдельного зернышка. Таким путем с лучшей из своих эмульсий Перрен получил для диаметра зернышка около 0,37 мкм. Кроме этого способа для измерения диаметра частиц, Перрен применил еще два способа, которые мы не описываем. Все они привели к согласованным результатам.

5. Таким образом, все величины, входящие в правую часть формулы (78.3), могут быть измерены экспериментально. После этого можно вычислить постоянную Больцмана k и число Авогадро N . Результаты Перрена оказались в согласии с другими методами измерения тех же постоянных. Описанные опыты Перрена, как и примыкающие к ним опыты по броуновскому движению, просты в идейном отношении. Но их фактическое осуществление требует громадного труда и большого экспериментального искусства. Эти классические опыты были выполнены в 1908—1911 гг. и имели большое значение для утверждения идей атомистики.

§ 79. Распределение Больцмана и атмосферы планет

1. Применим закон распределения Больцмана к уединенной планете, окруженной газовой атмосферой. Последнюю будем считать изотермической. Кроме того, будем предполагать, что все молекулы одинаковы. Это предположение не лишает наши рассуждения общности, поскольку каждый газ (если его рассматривать как идеальный), входящий в состав атмосферы, ведет себя независимо от остальных газов. Будем считать, что масса атмосферы пренебрежимо мала по сравнению с массой планеты. Тогда потенциальная энергия молекулы в поле тяготения планеты будет равна $-GMm/r$. Для концентрации молекул n на расстоянии r от центра планеты закон Больцмана (77.3) дает

$$n = n_0 e^{\frac{GMm}{kTr}}, \quad (79.1)$$

где M — масса планеты, а G — гравитационная постоянная. Если бы формула (79.1) была применима на всех расстояниях от планеты, то на бесконечности получилось бы конечное значение для концентрации n , а именно $n = n_0$. Но это невозможно, так как общее количество молекул в атмосфере планеты конечно, а объем пространства, окружающего ее, бесконечно велик. Равновесие возможно только при $n_0 = 0$, т. е. при полном отсутствии атмосферы.

2. Невозможность равновесного состояния планетной атмосферы связана с тем, что потенциальная энергия молекулы в поле тяготения планеты в бесконечности остается конечной. Приняв ее за нуль, можно сказать, что молекула при отсутствии столкновений совершала бы *инфинитное* движение, если бы ее полная энергия была положительна (см. т. I, § 57). Такие молекулы (а они всегда появляются в результате столкновений) не могут удерживаться полем тяготения планеты. Поэтому к планетной атмосфере в целом неприменима формула Больцмана (77.3), так как ее вывод предполагал, что газ находится в состоянии термодинамического равновесия. Пусть в некоторый момент скорости молекул в атмосфере распределены по закону Максвелла. Если бы с этого момента молекулы перестали сталкиваться между собой, испытывая лишь упругие столкновения

с поверхностью планеты, то все молекулы, скорости которых превышают вторую космическую (см. т. I, § 61), навсегда покинули бы планету. Остались бы только молекулы со скоростями, меньшими второй космической. Они совершали бы финитное движение вокруг планеты, а их скорости были бы распределены по закону Максвелла. Для финитных систем возможно термодинамическое равновесие. Оно будет обязательно больцмановским, если скорости молекул распределены по закону Максвелла. Действительно, к этому случаю полностью применимо рассуждение, изложенное нами в § 77 (пункты 4, 5). Для такого распределения в гравитационном поле $\sim 1/r^2$ требуется бесконечное множество молекул, и оно устанавливается бесконечно долго. Если, однако, из всех молекул, совершающих финитное движение, отобрать молекулы с полной энергией ϵ , удовлетворяющей неравенству $\epsilon < \epsilon_0 < 0$, то, каково бы ни было значение ϵ_0 , получится больцмановское распределение с конечным числом частиц и конечным временем установления.

3. Для планеты достаточно большой массы доля молекул со скоростями, превышающими вторую космическую, ничтожна. Вторая космическая скорость в проблеме рассеяния атмосферы называется *скоростью убегания молекулы*, а молекулы со скоростями, превышающими эту скорость, — *убегаящими молекулами*. Скорость убегания меняется с расстоянием молекулы от центра планеты. Ввиду ничтожной доли убегаящих молекул распределение частиц в атмосфере является *квазиравновесным* и при постоянной температуре может быть описано следующим образом. Подавляющая доля молекул распределена в пространстве по закону Больцмана. На больцмановское распределение накладывается поток убегаящих молекул. Вблизи планеты относительная концентрация молекул в таком потоке ничтожна. По мере удаления от планеты эта относительная концентрация непрерывно растет. На бесконечности все молекулы являются убегаящими. Поток убегаящих молекул непрерывно пополняется в результате межмолекулярных столкновений. Это приводит к тому, что *планета в конце концов должна потерять атмосферу*. Почему же Земля, Венера и другие планеты Солнечной системы имеют атмосферы? Потому что, это время τ , в течение которого планета теряет атмосферу, очень велико. Время τ называется *временем рассеяния атмосферы*. Его оценкой мы и займемся.

4. Точный расчет времени рассеяния реальной атмосферы потребовал бы знания параметров *верхних слоев атмосферы* и учета происходящих в них процессов. Действительно, рассеяние планетных атмосфер непосредственно определяется только условиями и процессами в верхних слоях атмосферы. Точный расчет, однако, в настоящее время вряд ли возможен, даже с использованием данных о верхней атмосфере Земли, полученных с помощью ракет и искусственных спутников. Оценка времени рассеяния идеализированной изотермической атмосферы, которую мы приводим, может дать результат, отличающийся на порядок или даже больше от действительного времени рассеяния. Однако она все же дает представление о порядке величины этого времени. Кроме того, эта оценка может служить интересным примером применения кинетической теории газов.

Опишем вокруг планеты сферу σ , концентрическую с поверхностью планеты. Радиус r_σ этой сферы возьмем настолько большим, чтобы столкновениями между молекулами вне сферы σ можно было полностью пренебречь, но этого нельзя делать в пространстве, ограниченном сферой σ . Предположим, что на сфере σ справедливо распределение Максвелла—Больцмана для всех молекул. В отношении молекул, совершающих финитное движение, справедливость этого предположения не вызывает сомнений. Но для убегаящих молекул оно верно только приближенно. Введем две скорости убегания: на поверхности планеты и на сфере σ . Обозначим их соответственно v_0 и v_σ . Если r_0 — радиус планеты, g_0 и $g_\sigma := g_0 \frac{r_0^2}{r_\sigma^2}$ — ускорения силы тяжести на поверхности планеты и на сфере σ , то

$$v_0 = \sqrt{2g_0 r_0} \quad (79.2)$$

и

$$v_{\sigma} = \sqrt{2g_{\sigma}r_{\sigma}} = r_0 \sqrt{\frac{2g_0}{r_{\sigma}}}. \quad (79.3)$$

Для Земли $v_0 = 11,2$ км/с (см. т. I, § 61). Величины v_0 и v_{σ} связаны между собой уравнением энергии

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_{\sigma}^2 + \epsilon_p, \quad (79.4)$$

где ϵ_p — разность потенциальных энергий на сфере σ и на поверхности планеты.

Дальнейшие вычисления удобно производить, приняв за единицу наиболее вероятную скорость v_m , определяемую соотношением (73.5). Скорость $x = v/v_m$, измеренную в таких единицах, будем называть *безразмерной скоростью*. В частности, безразмерные скорости убегания на поверхности планеты и на сфере σ равны $x_0 = v_0/v_m$ и $x_{\sigma} = v_{\sigma}/v_m$. Ввиду (79.2) и (79.3) они связаны соотношением

$$x_{\sigma}^2 = \frac{r_0}{r_{\sigma}} x_0^2. \quad (79.5)$$

Соотношение (79.4) в безразмерных величинах запишется

$$\frac{\epsilon_p}{kT} = x_0^2 - x_{\sigma}^2. \quad (79.6)$$

С учетом соотношения (79.6) из закона распределения Больцмана (77.3) получим

$$n_{\sigma} e^{-x_{\sigma}^2} = n_0 e^{-x_0^2}, \quad (79.7)$$

где n_{σ} — концентрация молекул на сфере σ . Наконец, если пользоваться безразмерными скоростями, то максвелловское распределение примет вид

$$dn = \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2} dx. \quad (79.8)$$

Концентрация убегających молекул на сфере σ равна

$$\Delta n = \frac{4n_{\sigma}}{\sqrt{\pi}} J, \quad (79.9)$$

где J означает интеграл

$$J = \int_{x_{\sigma}}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx. \quad (79.10)$$

Средняя безразмерная скорость таких молекул будет

$$c \equiv \langle x \rangle_{x > x_{\sigma}} = \frac{1}{J} \int_{x_{\sigma}}^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx.$$

Интегрируя это выражение по частям, получим

$$c = \frac{1}{2J} (x_{\sigma}^2 + 1) e^{-x_{\sigma}^2}. \quad (79.11)$$

Найдем средний поток убегających частиц Z , исходящий наружу от сферы σ . Поскольку распределение скоростей молекул изотропно, можно воспользоваться формулой (75.5). Средняя скорость рассматриваемых частиц, выраженная в обычных единицах, равна cv_m , а потому эта формула дает $Z = \frac{1}{4} S c v_m \Delta n$, где $S = 4\pi r_{\sigma}^2$ — поверхность сферы σ . Подставив сюда выражения (79.9) и (79.11) и воспользовавшись формулами (79.5) и (79.7), получим

$$Z = 2\sqrt{\pi} \left(\frac{r_0}{r_{\sigma}} x_0^2 + 1 \right) n_0 r_{\sigma}^2 v_m e^{-x_0^2}, \quad (79.12)$$

Это выражение и дает число молекул, теряемых атмосферой в единицу времени. Его можно представить в виде

$$Z = - \frac{dN}{dt}, \quad (79.13)$$

где N — полное число молекул в атмосфере.

Концентрацию n_0 можно выразить через N . Подавляющая масса атмосферы приходится на тонкий слой, примыкающий к поверхности планеты. В пределах этого слоя можно пренебречь кривизной поверхности планеты, а также изменением ускорения силы тяжести с высотой, т. е. положить $g = g_0$. Тогда распределение Больцмана (77.3) переходит в барометрическую формулу, и мы получаем

$$N = 4\pi r_0^2 n_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{mg_0 z}{kT}} dz = 4\pi r_0^2 n_0 \frac{kT}{mg_0}.$$

Отсюда и найдется концентрация n_0 . Подставляя ее в выражение (79.12) и воспользовавшись уравнением (79.13), придадим последнему вид

$$\frac{dN}{dt} = - \frac{N}{\tau}, \quad (79.14)$$

где введено обозначение

$$\tau = \frac{2\sqrt{\pi} r_0^2 kT}{mg_0 r_0^2 v_m \left(\frac{r_0}{r_\sigma} x_0^2 + 1 \right)} e^{x_0^2}. \quad (79.15)$$

Интегрирование уравнения (79.14) дает

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (79.16)$$

Из этой формулы видно, что постоянная τ имеет смысл времени, по истечении которого число молекул в атмосфере уменьшается в e раз. Поэтому τ может служить мерой времени, в течение которого планета может удерживать свою атмосферу.

5. Формула (79.15) еще не решает задачу, так как она содержит радиус r_σ , который мы еще не определили. В одном предельном случае решение очевидно. Это случай, когда планетная атмосфера — *бесконечно разреженная*. В ней полностью отсутствуют столкновения между молекулами, а распределение молекул в пространстве и по скоростям устанавливается в результате столкновений с поверхностью планеты. В рассматриваемом случае следует положить $r_\sigma = r_0$.

Используя, кроме того, соотношения $v_m^2 = \frac{2kT}{m}$ и $x_0 v_m = v_0 = \sqrt{2r_0 g_0}$, получим

$$\tau = \sqrt{\frac{2\pi r_0}{g_0}} \frac{e^{x_0^2}}{x_0 (x_0^2 + 1)}, \quad (79.17)$$

или

$$\tau = \sqrt{\frac{3}{2G\rho}} \frac{e^{x_0^2}}{x_0 (x_0^2 + 1)}, \quad (79.18)$$

где ρ — средняя плотность планеты. Ясно, что величина τ , определяемая этими формулами, имеет смысл *времени рассеяния бесконечно разреженной атмосферы*.

6. Остается определить радиус r_σ , когда атмосфера не является бесконечно разреженной. Для этого надо указать значение какой-то длины l , чтобы при $r > l$ молекулу можно было считать не принадлежащей к атмосфере планеты. Тогда радиус r_σ определится из условия $\lambda = l$, где λ — средняя длина свободного пробега молекулы при $r = r_\sigma$. В частности, атмосфера может считаться бесконечно разреженной, когда условие $\lambda \geq l$ соблюдается уже при $r = r_0$.

Для уединенной планеты нельзя заранее (т. е. без точного решения задачи) указать никакой длины, которую можно было бы принять за l . Единственным

параметром размерности длины в этом случае является радиус планеты r_0 , но он не имеет отношения к рассеянию атмосферы. Однако уединенная планета есть абстракция. Реальная планета вращается вокруг Солнца. А так как величина r_σ , входящая в формулу (79.15), как будет видно из дальнейшего, очень нечувствительна к выбору длины l , то в качестве l можно взять радиус планетной орбиты. Для обоснования этого заметим, что в системе отсчета, связанной с планетой, на молекулу действуют сила гравитационного притяжения планеты $F_{пл.}$, сила гравитационного притяжения Солнца $F_{солн.}$ и сила инерции $F_{ин.}$, связанная с ускоренным движением центра планеты к Солнцу (от осевого вращения планеты можно отвлечься — оно не играет принципиальной роли). Как было подробно разъяснено в первом томе (§§ 65, 69), сила $F_{солн.}$ полностью компенсируется силой инерции $F_{ин.}$, если пренебречь неоднородностью поля тяготения Солнца. С учетом указанной неоднородности компенсация не будет полной, и с этим связано явление приливов в планетной атмосфере. На расстояниях порядка радиуса планетной орбиты ни о какой компенсации речи быть не может. На таких расстояниях сила $F_{пл.}$ становится меньше результирующей сил $F_{солн.}$ и $F_{ин.}$. Если молекула удалится так далеко, то можно считать, что к планете она уже не вернется.

7. Итак, за l мы примем величину порядка радиуса планетной орбиты. Конкретно, для Земли возьмем $l = 10^8$ км. По формуле (79.1) найдем для различных газов значения радиуса r_σ , при котором $\lambda = 10^8$ км. При этом мы предполагаем, что на земной поверхности атмосферное давление нормальное (средняя длина свободного пробега $\lambda \sim 10^{-5}$ см для всех газов). Полагая $r_0 = 6375$ км, $T = 300$ К, получим табл. 7.

Таблица 7

Газ	Молекулярный вес	r_σ , км	Высота над земной поверхностью $h = r_\sigma - r_0$, км
N ₂	28	$6,78 \cdot 10^8$	400
He	4	$1,09 \cdot 10^4$	4 500
H ₂	2	$3,72 \cdot 10^4$	28 800

Таблица показывает, что если бы атмосфера состояла из одних только тяжелых газов (тяжелее водорода), то сфера σ практически совпадала бы с поверхностью Земли. В этом случае можно было бы пользоваться формулой (79.18) для бесконечно разреженной атмосферы. Для водорода радиус r_σ значительно превышает радиус Земли r_0 . В случае сложной атмосферы, состоящей из смеси различных газов, величина r_σ определяется наиболее легким компонентом ее (с учетом, конечно, содержания этого компонента в атмосфере). Так, если для земной атмосферы принять, что содержание водорода составляет 10^{-6} от полного числа молекул атмосферы (что примерно вдвое больше действительного числа), то мы получили бы $r_\sigma = 1,4 \cdot 10^4$ км. Но даже во всех этих случаях можно пользоваться формулой для бесконечно разреженной атмосферы. Она дает вполне приемлемую оценку. Действительно, во всех случаях, представляющих интерес, величина x_0^2 очень велика, и в формуле (79.15) можно пренебречь единицей по сравнению с $\frac{r_0}{r_\sigma} x_0^2$. В этом приближении

$$\frac{\tau_0}{\tau_\sigma} = \frac{r_\sigma}{r_0}, \quad (79.19)$$

где τ_0 и τ_σ означают времена рассеяния, вычисленные по формуле для бесконечно разреженной атмосферы и по формуле (79.15) соответственно. Мы видим, что формула для бесконечно разреженной атмосферы (79.19) завышает время рассеяния всего в несколько раз. Поэтому дальнейшие численные расчеты будут произведены с помощью формулы (79.18).

8. Однако с помощью формулы (79.18) не так легко оценить время рассеяния атмосферы. Формула очень чувствительна к температуре атмосферы T , влияние которой сказывается преимущественно через экспоненциальный множитель $e^{x_0^2}$. А так как на разных высотах температура атмосферы — разная и, кроме того, подвержена частым и нерегулярным изменениям, то невозможно с достаточной точностью определить значение T , которое следует подставлять в формулу. Поэтому мы воспользуемся формулой (79.18) для решения обратной задачи — по заданному времени τ найдем x_0^2 , а затем и температуру планетной атмосферы, при которой она рассеивается в окружающее пространство за время τ . Возраст Земли $\sim 4 \cdot 10^9$ лет $\approx 4 \cdot 10^9 \cdot 3,156 \cdot 10^7$ с. Проведем расчет для $\tau = 10^{10}$ лет и $\tau = 10^8$ лет. Для Земли $\rho = 5,517$ г/см³. Подставляя это значение в формулу (79.18) и логарифмируя, приходим к уравнению

$$0,4343x_0^2 = 14,19 + \lg x_0 + \lg(x_0^2 + 1), \quad (79.20)$$

в котором 0,4343 есть модуль перехода от натуральных логарифмов к десятичным. Корень уравнения (79.20) легко находится методом последовательных приближений.

Нулевое приближение. В правой части уравнения отбрасываем оба слагаемые, содержащие логарифмы. Получаем $x_0^2 = 32,68$.

Первое приближение. В правую часть подставляем значение x_0 из нулевого приближения. Это дает $x_0^2 = 37,92$. Таким же путем поступаем в последующих приближениях и получаем:

второе приближение $x_0^2 = 38,15$,

третье приближение $x_0^2 = 38,15$.

Таким образом, уже второе приближение обеспечивает точность до четырех значащих цифр.

Итак, для $\tau = 10^{10}$ лет $x_0^2 = 38,15$. Аналогичные вычисления для $\tau = 10^8$ лет дают $x_0^2 = 33,34$. Температура T может быть вычислена по формуле

$$x_0^2 = \frac{2R_0g_0}{v_m^2} = \frac{R_0g_0}{kT},$$

или

$$T = \frac{R_0g_0m}{kx_0^2}. \quad (79.21)$$

9. Результаты вычислений приведены в табл. 8. Из нее видно, что время τ очень чувствительно к изменениям температуры T . При изменении T на 12—15% τ меняется на два порядка. Отсюда следует, что рассеяние атмосферы должно сильно возрасти из-за нерегулярных местных колебаний температуры. Рассеяние сильно возрастает также из-за диссоциации двухатомных и многоатомных молекул под действием солнечного излучения. Из таблицы видно, что поле тяготения Земли надежно удерживает в течение геологических эпох все газы земной атмосферы, за исключением водорода и гелия. Формула (79.21) объясняет, почему Луна практически лишена атмосферы, а мощное гравитационное поле Юпитера не позволяет в течение геологических эпох рассеяться сколько-нибудь заметно даже наиболее легкому газу — атомарному и молекулярному водороду. Понятно также, почему Луна лишена атмосферы, а на Титане — шестом спутнике Сатурна — обнаружена атмосфера из метана (CH₄) и, возможно, аммиака (NH₃), хотя скорости убегания на обоих спутниках почти одинаковы (2,4 км/с на Луне и 2,6 км/с на Титане). Дело в том, что температура поверхности Титана (примерно 70—120 К) много ниже температуры лунной поверхности. При такой низкой температуре только наиболее легкие газы — водород и гелий — обладают тепловыми скоростями, достаточными для быстрого улетучивания их в окружающее пространство.

Из планет Солнечной системы наименее благоприятны условия для удержания атмосферы на Меркурии. Скорость убегания с поверхности пла-

Таблица 8

Планеты		χ_0^2	Температура T , К				
			H_2	He	H_2O	N_2	O_2
Земля	$\tau = 10^{10}$ лет	38,15	396	792	3 560	5 540	6 340
	$\tau = 10^8$ лет	33,34	454	908	4 090	6 360	7 260
Луна	$\tau = 10^{10}$ лет	37,99	18	36	162	252	288
	$\tau = 10^8$ лет	33,11	20,6	41,2	185	288	330
Марс	$\tau = 10^{10}$ лет	37,97	81	162	729	1 130	1 300
	$\tau = 10^8$ лет	33,17	93	186	837	1 300	1 490
Венера	$\tau = 10^{10}$ лет	38,11	335	670	3 010	4 690	5 360
	$\tau = 10^8$ лет	33,31	384	768	3 460	5 380	6 140
Юпитер	$\tau = 10^{10}$ лет	37,42	12 000	24 000	108 000	168 000	192 000
	$\tau = 10^8$ лет	32,61	13 800	27 600	124 000	193 000	221 000

неты составляет всего 3,8 км/с. Неблагоприятна также крайне высокая температура на освещенной поверхности планеты. Поэтому Меркурий могут покидать даже молекулы тяжелых газов. Наконец, может иметь значение давление электромагнитного и корпускулярного излучения Солнца, которое на Меркурии довольно значительно и способно заметно «сдувать» молекулы газов из атмосферы Меркурия, если бы таковая существовала.

§ 80. Энтропия и вероятность

1. Согласно феноменологической термодинамике все процессы в замкнутой системе происходят в направлении возрастания энтропии. В конце концов система переходит в равновесное состояние, в котором энтропия достигает максимума, и все процессы в системе прекращаются. Этот вывод, если его понимать буквально, находится в противоречии с основными представлениями молекулярно-кинетической теории. Рассмотрим, например, закрытый сосуд, разделенный перегородкой AB на две одинаковые части I и II (рис. 69). Пусть сначала в части сосуда I находится N молекул идеального газа, а в части II — ни одной. В момент времени $t = 0$ мгновенно удалим перегородку AB . Газ начнет расширяться. Молекулы из части I будут переходить в часть II . Спустя некоторое время возникнет и обратный поток молекул из части II в часть I , после чего начнется и будет продолжаться обмен молекулами между обеими частями. Когда числа молекул N_1 и N_2 в обеих частях сосуда, а также их потоки туда и обратно выравняются, наступит состояние равно-