Решение. Число столкновений одной молекулы с остальными дается выражением (86.5). Для n молекул его надо умножить на n и разделить на два. Деление на два необходимо потому, что при нашем подсчете каждая молекула учитывается дважды: один раз как ударяющая, другой — как ударяемая. В результате получаем

$$\nu=\frac{zn}{2}=\frac{1}{2}n^2\sigma\bar{v}_{\text{отн}}=\frac{1}{\sqrt{2}}n^2\sigma\bar{v}. \tag{86.14}$$

4. Газ состоит из смеси двух газов с концентрациями n_1 и n_2. Найти выражение для среднего полного числа столкновений ν_{12} молекул одного газа с молекулами другого газа в единице объема в единицу времени.

Ответ.

$$\nu_{12}=n_1n_2\sigma_{12}\bar{v}_{\text{отн}}=\sqrt{1+\frac{m_1}{2}}\,n_1n_2\sigma_{12}\bar{v}_1=\sqrt{1+\frac{m_2}{m_1}}\,n_1n_2\sigma_{12}\bar{v}_2. \tag{86.15}$$

§ 87. Эффективное сечение

1. *Площадь сечения сферы ограждения молекулы по большому кругу называется эффективным сечением молекулы, точнее, газокинетическим эффективным сечением молекулы при рассеянии ее на других молекулах.* Если рассеяние происходит на таких же молекулах, то эффективное сечение равно $\sigma=\pi d^2$, где d — диаметр молекулы. Если же молекула радиуса r_1 рассеивается на молекулах с радиусом r_2, то эффективное сечение будет $\sigma=\sigma_{12}=\pi(r_1+r_2)^2$.

Понятие эффективного сечения широко используется при рассмотрении различных явлений, возникающих при столкновении частиц. При столкновении частица может изменить направление своего движения, т. е. рассеяться. Она может поглотиться, диссоциировать молекулу или ионизовать атом, с которыми она сталкивается, и т. д. В соответствии с этим говорят об *эффективных сечениях рассеяния, поглощения, диссоциации, ионизации* и пр. Во всех таких случаях при вычислении среднего числа столкновений, приводящих к требуемому результату, можно для наглядности представить, что рассматриваемая частица (будем продолжать называть ее частицей A) окружена некоторой непроницаемой «сферой ограждения», а частицы, с которыми она сталкивается, являются точечными. Если частица A движется, а прочие частицы неподвижны, то они называются *полевыми частицами,* а частица A — *пробной частицей.* Среднее число столкновений пробной частицы с полевыми определяется формулой (86.1), где n — концентрация полевых частиц, а v — скорость пробной частицы относительно полевых. На формулу (86.1) следует смотреть как на определение понятия эффективного сечения σ соответствующего процесса.

В экспериментах по столкновениям ядерных и элементарных частиц более удобна другая интерпретация формулы (86.1) и эффективного сечения. Здесь обычно бывает неподвижна частица A, а прочие частицы налетают и бомбардируют ее. В связи с этим эти частицы, если они движутся параллельно, называются *пучком*, а частица A — *мишенью*, которую они бомбардируют. Величина $I = nv$ есть *интенсивность пучка*, т. е. число частиц, проходящих через единичную площадку, перпендикулярную к пучку, в единицу времени. Применительно к рассматриваемому случаю формулу (86.1) следует переписать в виде

$$\sigma = \frac{z}{I} = \frac{\Delta N}{I}. \tag{87.1}$$

Величина $\Delta N = z$ означает среднее число частиц, выбывших из пучка в единицу времени в результате столкновений с частицей-мишенью A. Таким образом, можно дать следующее определение эффективного сечения частицы по отношению к какому-либо процессу. *Эффективным сечением σ называется отношение среднего числа частиц, выбывших из пучка в единицу времени при столкновениях, приводящих к требуемому результату* (рассеянию, поглощению, ионизации, прилипанию и пр.), *к интенсивности самого пучка.*

2. Эффективное сечение тех или иных процессов, вообще говоря, сильно зависит от относительной скорости сталкивающихся частиц. Рассмотрим, например, *ионизацию атомов* при столкновениях. Если кинетическая энергия $\varepsilon_{\text{отн}}$ относительного движения сталкивающихся атомов меньше *энергии ионизации* атома, то последняя невозможна. Эффективное сечение ионизации равно в этом случае нулю. Когда $\varepsilon_{\text{отн}}$ равна энергии ионизации или превосходит ее, ионизация становится возможной. Ясно поэтому, что эффективное сечение ионизации должно зависеть от относительной скорости $v_{\text{отн}}$ сталкивающихся атомов. Сильная зависимость эффективного сечения от $v_{\text{отн}}$ имеет место для таких процессов, как поглощение нейтронов атомными ядрами, деление тяжелых атомных ядер под действием нейтронов, химические и термоядерные реакции и пр. Расчет эффективных сечений подобных процессов производится с помощью законов и вычислительных методов квантовой механики. В настоящей главе речь будет идти только о процессах *упругого рассеяния* молекул и атомов на других молекулах и атомах. В этих случаях внутреннее состояние сталкивающихся частиц не изменяется. Поперечное же сечение таких процессов очень слабо зависит от относительной скорости частиц. Вот почему для их изучения можно пользоваться моделью твердых шариков, в которой поперечное сечение σ совсем не зависит от относительной скорости.

3. В действительности наблюдается некоторое уменьшение поперечного сечения рассеяния молекул с увеличением относительной скорости. Объяснение этому было дано Сёзерлендом (1859—1912) в 1893 г. Он использовал модель твердых упругих шаров, но учел силы притяжения, с которыми молекулы действуют друг на друга в промежутках между столкновениями. Силы притяжения несколько сближают молекулы, пролетающие мимо друг друга, и делают возможными некоторые столкновения, которые при отсутствии этих сил не могли бы произойти. Это ведет к увеличению эффективного сечения рассеяния σ.

Исследуем вопрос с количественной стороны. Рассматривая относительное движение, молекулу A будем считать неподвижной, а молекулу B — движущейся (рис. 77). Относительную скорость молекулы B на бесконечности обозначим $\mathbf{v}_0$. Пусть b означает *прицельное расстояние между молекулами*, т. е. длину перпендикуляра, опущенного из центра молекулы A на направление прямой, вдоль которой направлен вектор $\mathbf{v}_0$. Если молекулы не взаимодействуют и $b > d$, то столкновение между ними невозможно. При наличии же сил притяжения столкновение может произойти и в этом случае, как это видно из рис. 77, б. Если b — максимальное значение прицельного расстояния, при котором столкновение еще произойдет, то эффективное сечение будет $\sigma = \pi b^2$. Эффективное сечение при отсутствии сил притяжения $\sigma_0 = \pi d^2$. Так как силы — центральные, то по закону площадей $v_0 b = vd$, где v — скорость молекулы B в момент максимального сближения с A. Возведя в квадрат, получим $\sigma v_0^2 = \sigma_0 v^2$. Величина v найдется из уравнения энергии $^1/_2\mu v^2 = {}^1/_2\mu v_0^2 + A$, где A — работа центральных сил притяжения при перемещении молекулы B из «бесконечности» в положение

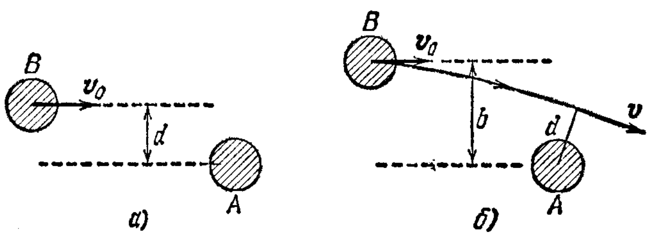

Рис. 77.

максимального сближения с молекулой A, а μ — приведенная масса. Введем кинетическую энергию относительного движения $\varepsilon_{\text{отн}} = {}^1/_2\mu v_0^2$. Тогда $\sigma\varepsilon_{\text{отн}} = \sigma_0(\varepsilon_{\text{отн}} + A)$, или

$$\sigma = \sigma_0\left(1 + \frac{A}{\varepsilon_{\text{отн}}}\right).$$

Эта формула, как ясно из ее вывода, применима в тех случаях, когда имеется всего одна пара взаимодействующих молекул A и B. Применять ее к молекулам газа можно только при условии, когда взаимодействия в газе могут рассматриваться как *парные*. В этом приближении учитываются силы притяжения, действующие на молекулу только со стороны одной молекулы, достаточно сблизившейся с рассматриваемой. Действия всех остальных молекул не учитываются. Так можно поступать, когда газ достаточно разрежен, а молекулярные силы притяжения убывают с увеличением расстояния между взаимодействующими молекулами достаточно быстро. Случаи, когда в разреженном газе сближаются и начинают взаимодействовать три и больше молекулы, маловероятны и по этой причине не принимаются во внимание.

В случае газа величина $\varepsilon_{\text{отн}}$ может принимать всевозможные значения при переходе от одной пары взаимодействующих молекул к другим. Поэтому целесообразно ввести некоторое *среднее эффективное сечение молекулы*, усреднив $1/\varepsilon_{\text{отн}}$ по всем относительным скоростям. Выполнив это и обозначая усредненное эффективное сечение прежней буквой σ, очевидно, придем к формуле вида

$$\sigma = \sigma_0\left(1 + \frac{S}{T}\right), \tag{87.2}$$

где S — новая постоянная, называемая *постоянной Сёзерленда*. Она имеет размерность температуры. Формула (87.2) также называется *формулой Сёзерленда*.

4. Если эффективное сечение σ существенно зависит от относительной скорости сталкивающихся частиц, то формулы (86.14) и (86.15) следует писать в виде

$$\nu = \frac{1}{2} n^2 \langle \sigma v_{\text{отн}} \rangle, \tag{87.3}$$

$$\nu_{12} = n_1 n_2 \langle \sigma v_{\text{отн}} \rangle, \tag{87.4}$$

причем усреднение должно быть произведено по *всему спектру относительных скоростей частиц газа,* в частности по максвелловскому распределению, если таковое установилось. Формулы (87.3) и (87.4) применяются при расчете скоростей химических и термоядерных реакций. В этих случаях σ очень сильно зависит от $v_{\text{отн}}$. (Для воспламенения горючей смеси надо нагреть ее до некоторой минимальной температуры!) Формула (87.3) дает среднее число реакций в единице объема в единицу времени, когда все реагирующие частицы одинаковы, а формула (87.4) — когда реакции происходят между разными частицами. Если в каждой реакции выделяется энергия E, то, очевидно, энергетическая мощность «реактора», отнесенная к единице объема, будет

$$P = \nu E. \tag{87.5}$$

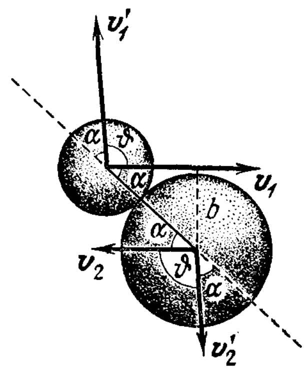

Рис. 78.

ЗАДАЧА

Показать, что в системе центра масс рассеяние шаров при упругих столкновениях сферически симметрично.

Решение. Пусть $\boldsymbol{v}_1$ — скорость первого, а $\boldsymbol{v}_2$ — скорость второго шаров (рис. 78). В системе центра масс

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = 0.$$

При столкновении шары в этой системе обмениваются нормальными компонентами импульсов, тогда как касательные компоненты их остаются неизменными. Отсюда следует, что скорости шаров в системе центра масс не изменяются по величине, а только поворачиваются на один и тот же угол ϑ (*угол рассеяния*). Пусть α — угол, который образовывали в момент удара начальные скорости шаров с линией центров. Тогда, как видно из рисунка, $2\alpha + \vartheta = \pi$, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}$. Прицельное расстояние $b = d \sin\alpha = d\cos\frac{\vartheta}{2}$. Пусть $\sigma = \pi d^2$, а $d\sigma = 2\pi b\,db$ — площадь кольца с радиусами b и $b + db$. Тогда $d\sigma = {}^1/_2\pi d^2 \sin\vartheta\,d\vartheta$. Вероятность рассеяния в телесный угол $d\Omega = 2\pi\sin\vartheta\,d\vartheta$ равна

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{d\Omega}{4\pi},$$

т. е. пропорциональна величине $d\Omega$. Коэффициент пропорциональности $1/4\pi$ не зависит от ϑ. А это и значит, что рассеяние сферически симметрично.