убедиться с помощью формулы (95.8). Вторая сила играет основную роль в сильно разреженных газах. Она пропорциональна давлению. В промежуточной области существенны обе силы.

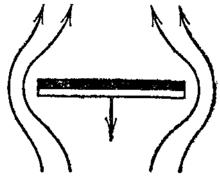

Рис. 91.

Радиометрический эффект при низких давлениях удобно наблюдать с помощью *радиометра Крукса* (1832—1919). Основной частью этого прибора являются слюдяные крылышки, прикрепленные к колпачку, надетому на острие иглы. Таким образом, крылышки могут вращаться вокруг вертикальной оси практически без трения. Крылышки зачернены с одной стороны и помещены в стеклянном баллоне с высоким вакуумом. При освещении крылышки приходят во вращение светлой стороной вперед.

### ЗАДАЧА

Изотермическая эффузия газа через пористую перегородку (поры которой малы по сравнению с длиной свободного пробега) используется для разделения изотопов. Естественная смесь изотопов помещается в сосуд с пористыми стенками. Газ, прошедший через поры сосуда в результате эффузии, откачивается и собирается в специальном резервуаре. С ним производится второй цикл эффузии, затем третий и т. д., пока не будет достигнута требуемая степень разделения изотопов. Сколько циклов эффузии необходимо произвести, чтобы отношение концентраций частиц легкого и тяжелого изотопов увеличить в 10 раз, если молекулярные веса их равны соответственно $\mu_1$ и $\mu_2$?

Ответ. $N \geqslant \dfrac{2}{\lg \dfrac{\mu_2}{\mu_1}}$.

## § 96. Молекулярное течение ультраразреженного газа через прямолинейную трубу

**1.** Течение ультраразреженного газа через трубу существенно отличается от течения Пуазейля вязкой жидкости или плотного газа. Это различие обусловлено тем, что течение ультраразреженного газа определяется исключительно столкновениями его молекул со стенками трубы. Столкновения молекул между собой никакой роли не играют. Результатом этого является следующая особенность течения ультраразреженного газа. Движение молекул газа, входящих в трубу с одного конца, совершенно не зависит от движения молекул, вступающих в нее с другого конца. Полный поток молекул через трубу можно представить как разность двух независимых потоков, проходящих в противоположных направлениях. Если это условие выполняется, то течение газа называют *молекулярным течением* или *течением Кнудсена*.

**2.** Рассмотрим стационарное молекулярное течение через трубу, длина которой $l$ очень велика по сравнению с ее поперечным размером $a$. (В случае цилиндрической трубы под $a$ будем понимать ее радиус.)

Допустим сначала, что через отверстие на одном конце трубы вступает ежесекундно $N_1$ молекул, а на другом конце поддерживается полный вакуум. Определим число молекул $N$, которые проходят через трубу и выходят из второго конца ее. Число $N$ существенно зависит от характера отражения молекул от стенок трубы. Если бы, например, стенки трубы были абсолютно гладкими, а молекулы отражались от них зеркально, то все молекулы, вошедшие в трубу с одного конца, вышли бы из другого конца, т. е. было бы $N = N_1$. На самом деле такой идеализированный случай никогда не осуществляется. В реальном опыте значительная доля молекул, ударившихся о стенку трубы, летит обратно. Определить вид зависимости $N$ от $N_1$ и от параметров трубы можно из соображений размерности. Из механизма явления следует, что должна существовать функциональная связь между величинами $N$, $N_1$, $a$, $l$. Из этих величин можно составить две независимые безразмерные комбинации, а именно $N/N_1$ и $a/l$. При течении по трубе одна из них должна быть функцией другой: $\frac{N}{N_1} = f(a/l)$, так что

$$N = N_1 f\left(\frac{a}{l}\right).$$

Функция $f\left(\frac{a}{l}\right)$ зависит от формы поперечного сечения трубы, а также от характера отражения молекул от ее стенок. Очевидно $f(0) = 0$, так как при $a = 0$ выходящий поток $N$ обращается в нуль, каково бы ни было значение $N_1$. Предполагая, что функция $f\left(\frac{a}{l}\right)$ разлагается в степенной ряд, произведем это разложение и оборвем его на линейном члене. Тогда получим

$$N = CN_1 \frac{a}{l},$$

где $C$ — постоянная, зависящая от формы поперечного сечения трубы и от характера отражения молекул от ее стенок. В частности, она может зависеть от того, как меняется температура стенки вдоль трубы.

Пусть теперь через один конец в трубу вступает ежесекундно $N_1$ молекул, а через другой — $N_2$. Ввиду независимости обоих потоков, через поперечное сечение трубы будет проходить число молекул, равное

$$N = C \frac{a}{l} (N_1 - N_2). \qquad (96.1)$$

Можно представить себе, что труба соединяет два сосуда. В одном поддерживается давление $P_1$ и температура $T_1$, в другом — давление

$P_2$ и температура $T_2$. Если концентрации молекул в сосудах равны $n_1$ и $n_2$ соответственно, то

$$N_1 = {}^1/_4 S n_1 \bar{v}_1, \quad N_2 = {}^1/_4 S n_2 \bar{v}_2,$$

где $S$ — площадь поперечного сечения трубы.

Используя соотношения $\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{kT}{m}}$ и $P = nkT$, преобразуем выражение для $N$ к виду

$$N = A\frac{a^3}{l\sqrt{m}}\left(\frac{P_1}{\sqrt{T_1}} - \frac{P_2}{\sqrt{T_2}}\right), \tag{96.2}$$

где $A$ — новая постоянная:

$$A = \frac{C}{\sqrt{2\pi k}}\frac{S}{a^2}. \tag{96.3}$$

Для массы газа, ежесекундно протекающего через поперечное сечение трубы, получаем

$$Q = A\sqrt{m}\,\frac{a^3}{l}\left(\frac{P_1}{\sqrt{T_1}} - \frac{P_2}{\sqrt{T_2}}\right). \tag{96.4}$$

**3.** Численные коэффициенты $C$ и $A$ можно оценить с помощью следующих элементарных соображений. Рассмотрим круглую трубу и будем предполагать, что температура газа одна и та же по всей трубе. Протекание газа через трубу можно рассматривать как процесс диффузии. Следовательно, $N = -DS\,dn/dx$, где $D = {}^1/_3\lambda\bar{v}$ — коэффициент диффузии (ось $X$ направлена вдоль оси трубы). Для стационарного процесса $N = \text{const}$, а потому $dn/dx = \text{const}$. Значит, $dn/dx = (n_2 - n_1)/l$, и далее

$$N = \frac{1}{3}\lambda\bar{v}S\frac{n_1 - n_2}{l}.$$

При кнудсеновском течении столкновениями между молекулами можно полностью пренебречь. Длина свободного пробега полностью определяется столкновениями молекул со стенками трубы. По порядку величины она равна диаметру трубы $2a$. Принимая это значение, получим

$$N = \frac{2}{3}a\bar{v}S\frac{n_1 - n_2}{l},$$

или

$$N = \frac{8}{3}\frac{a}{l}(N_1 - N_2). \tag{96.5}$$

Сравнение этой формулы с (96.1) показывает, что для круглой трубы

$$C = \frac{8}{3}, \quad A = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2k}}. \tag{96.6}$$

Приведенный элементарный вывод показывает также, что в случае неизменности температуры вдоль трубы величины $N$ и $Q$

строго пропорциональны разности давлений $P_1 - P_2$. Напротив, при изменении температуры вдоль трубы пропорциональность между теми же величинами и разностью $\left(\frac{P_1}{\sqrt{T_1}} - \frac{P_2}{\sqrt{T_2}}\right)$ — только приближенная. Она справедлива лишь до тех пор, пока в разложении функции $f\left(\frac{a}{l}\right)$ в степенной ряд можно ограничиться только линейным членом.

Формулы (96.2) и (96.3) при численных значениях постоянных $C$ и $A$ (96.6) называются *формулами Кнудсена.*

**4.** Формула (96.4) показывает, что при прочих равных условиях *расход газа $Q$ пропорционален кубу радиуса трубы.* Это должно учитываться при конструировании вакуумных установок. Допустим, что мощность высоковакуумного насоса позволяет откачивать в секунду $V$ литров газа, а труба, соединяющая насос с откачиваемым баллоном, способна пропускать за то же время $v$ литров. Если $v \ll V$, то применять мощный насос бессмысленно. Для правильного использования насоса размеры соединительной трубы надо выбирать так, чтобы было $v \sim V$.

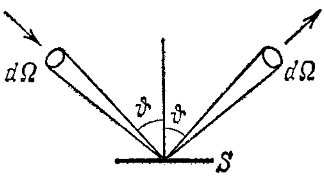

Рис. 92.

**5.** Приведем теперь более строгий молекулярно-кинетический вывод полученных формул. Наиболее существенным моментом нашего вывода будет предположение относительно характера взаимодействия ударяющихся молекул со стенками трубы. Предположим, что после удара о стенку молекулы отражаются обратно так, что их скорости становятся распределенными по закону Максвелла при температуре, равной температуре стенки. Это предположение означает, что молекулы газа воспринимают температуру стенки, а их скорости становятся распределенными изотропно уже в результате однократных ударов о стенку. Хотя это и не совсем правильно, но такое предположение является простейшим и в рассматриваемом вопросе приводит в основном к правильным результатам.

Строго говоря, мы выражались не совсем точно. Отраженные молекулы движутся только от стенки, среди них нет молекул, движущихся к стенке. Поэтому о максвелловском распределении скоростей отраженных молекул можно говорить лишь условно. Смысл нашего предположения состоит в том, что если отраженные молекулы пополнить таким же числом молекул, летящих с теми же, но противоположно направленными скоростями, то получится максвелловское распределение.

Допустим теперь, что с единичной площадкой $S$ в одну секунду сталкивается $N_{\text{ст}}$ молекул. Найдем долю этих молекул $dN_{\text{ст}}$, отражающихся в телесный угол $d\Omega$, ось которого составляет угол $\vartheta$ с нормалью к площадке $S$ (рис. 92). Так как по нашему предположению распределение отраженных молекул по углам и скоростям не зависит от скоростей и направления движения падающих молекул, то можно предположить, что падающие молекулы вместе с отраженными распределены по закону Максвелла. Пусть $n$ — число всех молекул в единице объема. Тогда число молекул в телесном угле $d\Omega$, падающих в единицу времени на площадку $S$ под углом $\vartheta$ к нормали, будет $n\bar{v}\,S\cos\vartheta\,\frac{d\Omega}{4\pi}$. Таково же будет и число молекул $dN_{\text{ст}}$, отразившихся в симметрично расположенный телесный угол по другую сторону нормали. Полное число падающих молекул дается формулой (75.5), т. е. $N_{\text{ст}} = {}^1/_4\, n\bar{v}$. Вводя его, получим,

$$dN_{\text{ст}} = \frac{N_{\text{ст}}}{\pi}\cos\vartheta\,d\Omega. \tag{96.7}$$

**6.** Вернемся к задаче о молекулярном течении газа через трубу. Трубу будем считать цилиндрической, радиуса $a$. Так как расход газа $Q$ один и тот же через все сечения трубы, то для его вычисления можно взять сечение $S$, проходящее через середину трубы (рис. 93). Плоскость сечения $S$ примем за координатную плоскость $YZ$, ось $X$ направим по одной из образующих цилиндра. Пусть $dS$ — элементарная площадка в сечении $S$. Возьмем на боковой поверхности

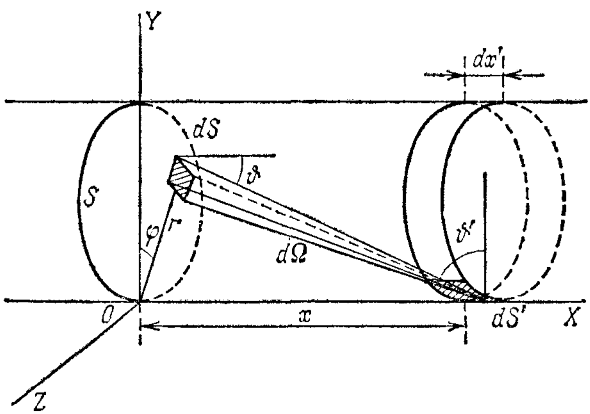


Рис. 93.

цилиндра бесконечно короткий поясок ширины $dx'$ и на нем элементарную площадку $dS'$. Из середины площадки $dS'$ площадка $dS$ видна под телесным углом $d\Omega = \frac{dS\cos\vartheta}{R^2}$. Число молекул $dN$, летящих от площадки $dS'$ и проходящих через $dS$ в одну секунду, определяется выражением

$$dN = \frac{N_{\text{ст}}}{\pi}\cos\vartheta'\,d\Omega = \frac{N_{\text{ст}}\cos\vartheta\cos\vartheta'}{\pi R^2}\,dS\,dS',$$

где $R$ — расстояние между площадками, $\vartheta$ и $\vartheta'$ — углы между нормалями к ним и линией, соединяющей центры площадок. Величина $N_{\text{ст}}$ относится к месту нахождения площадки $dS'$ и является функцией ее координаты $x$: $N_{\text{ст}} = N_{\text{ст}}(x)$.

Для определения полного числа молекул $N$, проходящих через сечение $S$ в единицу времени, надо выражение для $dN$ проинтегрировать по сечению $S$ и по боковой поверхности цилиндра. Но так как все площадки $dS'$ на пояске расположены совершенно одинаково относительно сечения $S$, то $dS'$ можно сразу заменить на площадь пояска $2\pi a\,dx$. Для упрощения вычислений вершину телесного угла $d\Omega$ можно поместить на оси $Y$, как это сделано на рис. 93. Пусть $y$ и $z$ — координаты центра площадки $dS$. Тогда

$$\cos\vartheta = \frac{x}{R}, \quad \cos\vartheta' = \frac{y}{R},$$

$$N = 2a \int y\,dS \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} N_{\text{ст}}(x)\frac{x}{R^4}\,dx.$$

Если бы число ударов $N_{\text{ст}}$ было одинаково по всей длине трубы, т. е. не зависело от $x$, то подынтегральное выражение $N_{\text{ст}}(x)\,x/R^4$ было бы нечетной функцией $x$, и интеграл по $x$ обратился бы в нуль. Заметив это и предполагая, что функция $N_{\text{ст}}(x)$ не слишком быстро меняется вдоль трубы, разложим ее в ряд по степеням $x$ и оборвем разложение на квадратичном члене:

$$N_{\text{ст}} = N_{\text{ст}}(0) + \left(\frac{dN_{\text{ст}}}{dx}\right)_{x=0} x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2N_{\text{ст}}}{dx^2}\right)_{x=0} x^2.$$

При интегрировании по $x$ первое и последнее слагаемое не внесут никакого вклада в интеграл, и мы получим

$$N = 2a\frac{dN_{\text{ст}}}{dx}\int y\,dS \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{x^2}{R^4}\,dx.$$

Считая трубу длинной, заменим в последнем интеграле конечные пределы бесконечными. Для вычисления всего интеграла введем в плоскости сечения $S$ полярные координаты $r$ и $\varphi$, поместив начало полярной системы координат в точку $O$. Тогда $y = r\cos\varphi$, $R^2 = r^2 + x^2$, $dS = r\,dr\,d\varphi$, а потому

$$N = 2a\frac{dN_{\text{ст}}}{dx}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^2\,dr \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{r^2+x^2}\,dx.$$

Для интеграла по $x$ получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{r^2+x^2}\,dx = \left(\frac{1}{2r}\operatorname{arctg}\frac{x}{r} - \frac{1}{2}\frac{x}{r^2+x^2}\right)_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2r}.$$

Выполнив остальные интегрирования, найдем

$$N = \frac{8\pi a^3}{3}\frac{dN_{\text{ст}}}{dx}. \tag{96.8}$$

При стационарном течении величина $N$, а с ней и производная $\frac{dN_{\text{ст}}}{dx}$ остаются постоянными вдоль трубы. Используя это, а также выражение $N_{\text{ст}} = {}^1/_4\, n\bar{v}$, без труда получим

$$\frac{dN_{\text{ст}}}{dx} = \frac{N_1 - N_2}{\pi a^2 l}.$$

После этого формула (96.8) приводится к виду (96.5). Совпадение численных значений коэффициента $C$ в строгом и оценочном выводах, конечно, является случайным.

## ЗАДАЧИ

1. Стеклянный сосуд с толщиной стенок $l = 5$ мм и емкостью $V = 1$ л наполнен азотом и окружен вакуумом. В стенке сосуда образовался узкий цилиндрический канал радиуса $a = 0{,}1$ мм. Начальное давление газа в сосуде настолько мало, что радиус канала пренебрежимо мал по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа. Как меняется во времени концентрация молекул газа в сосуде? Определить время $\tau$, по истечении которого давление газа в сосуде уменьшится в $e$ раз, если температура поддерживается постоянной и равна $T = 300$ K.

Ответ. $n = n_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, $\quad \tau = \dfrac{3Vl}{2\pi a^3 \bar{v}} = 5\cdot 10^3$ с $= 83{,}4$ мин.

2. Полностью эвакуированный стеклянный сосуд с толщиной стенок $l = 3$ мм и емкостью $V = 1$ л погружен в атмосферу углекислого газа ($CO_2$). В стенке сосуда образовался узкий цилиндрический канал диаметра $D = 0{,}1$ мм. Давление окружающего газа настолько мало, что диаметр канала пренебрежимо мал по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа. Как меняется во времени концентрация молекул газа в сосуде? Определить время $\tau$, по истечении которого давление газа в сосуде будет составлять $(e-1)/e = 0{,}628$ от давления окружающего газа при условии, что температура поддерживается постоянной и равна $T = 300$ K.

Ответ. $n = n_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$,

$$\tau = \frac{12Vl}{\pi D^3 \bar{v}} = 3\cdot 10^4 \text{ с} = 5\cdot 10^2 \text{ мин} = 8{,}33 \text{ часа}.$$

3. Сосуды с объемами $V_1$ и $V_2$ соединены между собой цилиндрическим капилляром радиуса $a$ и длины $l$, по которому происходит изотермическое кнудсеновское перетекание газа из одного сосуда в другой. Как будут меняться во времени концентрации молекул газа в сосудах $n_1$ и $n_2$, если их начальные значения были равны $n_{10}$ и $n_{20}$?

Решение. Перетекание описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dn_1}{dt}=\frac{n_2-n_1}{\tau_1},\quad \frac{dn_2}{dt}=\frac{n_1-n_2}{\tau_2},$$

где

$$\tau_1=\frac{3V_1l}{2\pi a^3\bar{v}},\qquad \tau_2=\frac{3V_2l}{2\pi a^3\bar{v}}.$$

Вычитая из одного уравнения другое, получим

$$\frac{d}{dt}(n_1-n_2)=-\frac{n_1-n_2}{\tau},$$

где

$$\frac{1}{\tau}=\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}.$$

Интегрируя и используя начальные условия, найдем

$$n_1-n_2=(n_{10}-n_{20})\,e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Подставляем это значение в исходную систему уравнений и интегрируем. В результате получим

$$n_1=\frac{n_{10}\tau_1+n_{20}\tau_2}{\tau_1+\tau_2}+\frac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2}(n_{10}-n_{20})\,e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$n_2=\frac{n_{20}\tau_2+n_{10}\tau_1}{\tau_1+\tau_2}+\frac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2}(n_{20}-n_{10})\,e^{-\frac{t}{\tau}}.$$