

имеет место *частичное смачивание* (когда  $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ , рис. 119, а), или *частичное несмачивание* (когда  $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$ , рис. 119, б).

Явление краевого угла наблюдается у стенок сосудов, когда в них налита жидкость (рис. 120). Величина краевого угла здесь также определяется формулой (108.4).

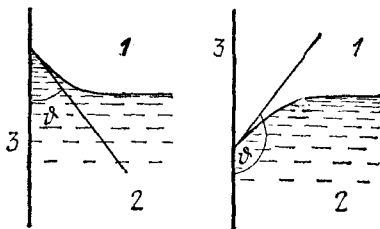


Рис. 120.

4. Несмачиванием твердых тел жидкостями объясняются многие явления. Приведем некоторые из них. На поверхность воды можно положить лист алюминия. Он не утонет, даже если на него положить небольшой груз. Стальная иголка (в особенности если она покрыта тонким слоем парафина) не тонет, если ее осторожно положить на поверхность воды. Возьмем сито с металлической

сеткой. Погрузим сетку в расплавленный парафин, а затем встряхнем, чтобы парафин не заполнял отверстия в сетке. После этого положим на дно сита лист бумаги и нальем в него воды. Осторожно вытянем лист бумаги. Вода не будет выливаться через отверстия сетки.

Возьмем ареометр или похожий на него прибор, плавающий в вертикальном положении на поверхности воды, выступающая немного наружу. На верхний конец трубки ареометра наденем и закрепим плоский кружок из проволочной сетки и погрузим весь прибор в воду. Ареометр начнет всплывать. Однако, когда сетка дойдет до поверхности воды, то прибор остановится, встречая у самой поверхности сопротивление не пропускающей его пленки. Если слегка наклонить прибор, чтобы край сетки отделился от воды, то он всплывет, и сетка окажется значительно выше поверхности воды. Можно заставить ареометр всплывать и не наклоняя его. Для этого достаточно капнуть на воду несколько капель эфира.

### § 109. Разность давлений по разные стороны изогнутой поверхности жидкости. Формула Лапласа

1. Если поверхность жидкости — кривая, то при равновесии давления по разные стороны ее должны быть разными. Явление обусловлено силами поверхностного натяжения. Рассмотрим сначала простейший случай, когда жидкость ограничена боковой поверхностью прямого круглого цилиндра. Поперечное сечение цилиндра представлено на рис. 121. Выберем на его поверхности бесконечно малый участок  $AB$ , стягиваемый центральным углом  $\varphi$ . На его боковые стороны действуют касательные силы  $b\sigma$ , где  $b$  — длина цилиндра. Равнодействующая этих сил направлена параллельно радиусу  $CO$  цилиндра и равна  $F = 2b\sigma \sin \frac{\varphi}{2}$ , или  $F = b\sigma\varphi$ , так как угол  $\varphi$  выбран бесконечно малым. Подставляя сюда  $\varphi = \frac{a}{R}$ , где  $a$  — длина дуги  $AB$ , а  $R$  — радиус цилиндра, получим

$$F = \frac{\sigma}{R} S. \quad (109.1)$$

Здесь  $S = ab$  — площадь бесконечно малого прямоугольного участка на боковой поверхности цилиндра. Разделив силу  $F$  на площадь  $S$ , найдем разность давлений внутри и снаружи жидкости:

$$P_2 - P_1 = \frac{\sigma}{R}.$$

2. Обобщим теперь эту формулу на случай, когда жидкость ограничена поверхностью двойной кривизны. С этой целью возьмем на поверхности жидкости четыре точки  $A, B, C, D$ , находящиеся в вершинах бесконечно малого прямоугольника (рис. 122). Проведем через  $A$  и  $B, B$  и  $C$  и т. д. плоскости, перпендикулярные к поверхности жидкости. (На рис. 122 изображены только две плоскости, проведенные через  $AD$  и  $BC$ . Они пересекаются вдоль бесконечно малого отрезка  $OO'$ .) В результате получится бесконечно малый криволинейный прямоугольник  $ABCD$ . Его стороны могут рассматриваться как бесконечно малые дуги окружностей. Пусть  $R_1$  — радиус кривизны дуги  $AB$ . Радиус кривизны дуги  $DC$  отличается от  $R_1$  бесконечно мало. На противоположные стороны  $AD$  и  $BC$  действуют касательные силы поверхностного натяжения. Результирующая этих сил нормальна к поверхности жидкости. Согласно формуле (109.1) ее величина равна  $F_1 = \frac{\sigma}{R_1} S$ , где  $S$  — площадь прямоугольника  $ABCD$ . Рассуждая так же, найдем, что результирующая касательных сил поверхностного натяжения, действующих на противоположные стороны  $AB$  и  $DC$ , тоже нормальна к поверхности жидкости и равна  $F_2 = \frac{\sigma}{R_2} S$ , где  $R_2$  — радиус кривизны дуги  $AD$ . (Радиус кривизны дуги  $BC$  отличается от него бесконечно мало.)

Таким образом, результирующая всех сил поверхностного натяжения, действующих на границах прямоугольника  $ABCD$ , равна

$$F = F_1 + F_2 = \sigma S \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Разделив ее на  $S$ , получим искомую разность давлений:

$$P_2 - P_1 = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (109.2)$$

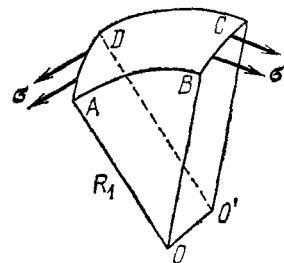


Рис. 122.

Формула (109.2) называется *формулой Лапласа*. Величины  $R_1$  и  $R_2$  суть радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости. Радиус кривизны считается положительным, если соответствующее нормальное сечение вогнуто в сторону жидкости. В противном случае он считается отрицательным.

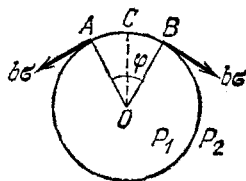


Рис. 121.

Величина  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  называется *средней кривизной поверхности*. Средняя кривизна не зависит от выбора взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости. В противном случае от такого выбора зависела бы и разность давлений  $P_2 - P_1$ , что физически бессмысленно. В дифференциальной геометрии независимость средней кривизны любой поверхности от выбора нормальных сечений доказывается чисто математическими методами без использования физических или каких-либо других соображений. Эта независимость составляет содержание так называемой *теоремы Эйлера*.

3. Если поверхность жидкости — сферическая, то  $R_1 = R_2 = R$ , и формула (109.2) переходит в

$$P_2 - P_1 = \frac{2\sigma}{R}. \quad (109.3)$$

Для мыльного пузыря разность давлений воздуха внутри и вне пузыря вдвое больше по сравнению с тем, что дает формула (109.3), т. е.

$$P_2 - P_1 = \frac{4\sigma}{R}.$$

Это связано с тем, что оболочка пузыря имеет две поверхности: наружную и внутреннюю. Она действует как пленка с удвоенным поверхностным натяжением.

Таким образом, чем больше кривизна поверхности пузыря, тем больше давление газа в нем. Положение здесь противоположно тому, с которым мы сталкиваемся, надувая футбольный мяч: с увеличением размеров мяча увеличивается и давление газа внутри него. Указанное различие связано с тем, что поверхностное натяжение пленки пузыря не зависит от его размеров, тогда как натяжение оболочки камеры футбольного мяча возрастает по мере ее надувания.

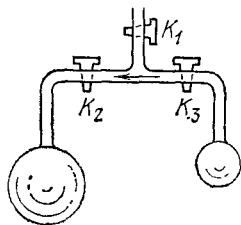


Рис. 123.

Рассмотрим два мыльных пузыря, сообщающихся друг с другом. Их можно получить при помощи тройника, снабженного необходимыми кранами (рис. 123). Сначала каждый пузырь выдувается в отдельности. Затем кран  $K_1$  закрывается, а краны  $K_2$  и  $K_3$  открываются. Давление в меньшем пузыре больше, и воздух из этого пузыря будет перетекать в больший пузырь. Больший пузырь будет расти за счет меньшего.

4. Применим формулу Лапласа для расчета высоты поднятия жидкости в цилиндрическом капилляре радиуса  $a$  (рис. 124). Пренебрежем изменением давления жидкости при изменении высоты

на величину порядка  $a$ . В этом приближении разность давлений  $P_2 - P_1$  будет одной и той же во всех точках мениска. То же относится к средней кривизне  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ , как это следует из формулы Лапласа (109.2). Кроме того, ввиду симметрии  $R_1 = R_2$ . Поэтому в рассматриваемом приближении мениск можно считать сферическим. Его радиус кривизны равен

$$R = \frac{a}{\cos \vartheta},$$

где  $\vartheta$  — краевой угол. В рассматриваемом случае  $P_1$  есть атмосферное давление, а  $P_2$  — давление жидкости на уровне мениска. Эти давления связаны соотношением

$$P_1 - P_2 = \rho gh,$$

где  $h$  — высота поднятия, а  $\rho$  — плотность жидкости. Сравнивая эту формулу с формулой (109.3), получим

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R} = \frac{2\sigma}{\rho g a} \cos \vartheta. \quad (109.4)$$

Высота поднятия обратно пропорциональна радиусу капилляра. Когда угол  $\vartheta$  — тупой, т. е. мениск — выпуклый, величина  $h$  отрицательна, т. е. имеет место не поднятие, а опускание жидкости в капилляре.

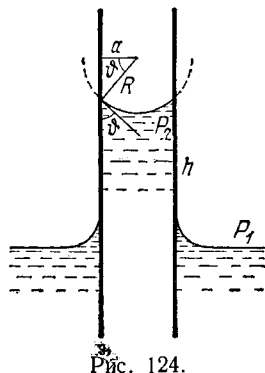


Рис. 124.

### ЗАДАЧИ

1. Капля воды с массой  $m = 0,1$  г введена между двумя плоскими и параллельными между собой стеклянными пластинками, смачиваемыми водой, причем краевой угол  $\vartheta = 0$ . Как велика сила притяжения между пластинками  $F$ , если они находятся друг от друга на расстоянии  $d = 10^{-4}$  см? Поверхностное натяжение воды (при  $18^\circ$ )  $\sigma = 73$  дин·см $^{-1}$ .

Решение. Капля примет форму диска с вогнутой периферийной поверхностью. Кривизной сечения этой поверхности плоскостью, параллельной пластинкам, можно пренебречь. Радиус кривизны нормального к нему сечения  $r = d/2$ . Средняя кривизна боковой поверхности диска  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{d}$ . Давление жидкости между дисками меньше атмосферного на  $\Delta P = 2\sigma/d$ . Площадь диска  $S = m/(\rho d)$ , где  $\rho$  — плотность жидкости. Пластинки будут прижиматься друг к другу с силой

$$F = S \Delta P = \frac{2m\sigma}{\rho d^2} = 1,46 \cdot 10^9 \text{ дин} = 1,46 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

2. Грамм ртути помещен между двумя плоскими стеклянными пластинками. Какую силу  $F$  надо приложить к верхней пластинке, чтобы ртуть приняла форму круглой лепешки однородной толщины и радиуса  $R = 5$  см. Поверхностное натяжение ртути (при  $15^\circ$ )  $\sigma = 487$  дин·см $^{-1}$ , краевой угол между ртутью и стеклом  $\Theta = 40^\circ$ .

О т в е т.  $F = \frac{2\sigma\rho \cos \Theta}{m} \pi^2 R^4 = 630 \text{ Н}$  ( $m$  — масса ртути).

3. С какой силой  $F$  притягиваются две вертикальные и параллельные стеклянные пластинки, частично погруженные в воду так, что расстояние между ними равно  $d = 0,1$  мм? Ширина пластинок  $l = 10$  см,  $\sigma = 73$  дин·см<sup>-1</sup>,  $\theta = 0$ . Высота пластинок такова, что поднимающаяся вода не доходит до их верхних краев.

$$\text{Ответ. } F = \frac{2\sigma^2 l \cos^2 \theta}{\rho g d^2} \approx 10 \text{ Н.}$$

4. Бесконечно длинная прямоугольная пластинка кладется на поверхность смачивающей ее жидкости, а затем слегка приподнимается, увлекая за собой некоторое количество жидкости (рис. 125). Найти уравнение боковой поверхности жидкости, устанавливающейся под влиянием капиллярных сил и силы тяжести.

Решение. Примем за ось  $X$  прямую, перпендикулярную к длинной стороне пластинки и лежащую на горизонтальной поверхности жидкости, а за ось  $Y$  — вертикальную прямую, касающуюся правой цилиндрической поверхности жидкости. Пусть  $x$  и  $y$  означают текущие координаты точки, лежащей на искомой поверхности. Давление внутри жидкости на уровне точки  $A$  (рис. 125) равно  $P = P_0 - \rho g y$ , где  $P_0$  — атмосферное давление. То же давление можно выразить по формуле Лапласа  $P = P_0 - \sigma K$ , где  $K$  — абсолютное значение кривизны поверхности жидкости в точке  $A$ . Следовательно,

$$\rho g y = \sigma K. \quad (109.5)$$

Рис. 125.

По определению кривизны  $K = -d\varphi/ds$ , где  $ds$  — элемент длины дуги, считаемый положительным, когда он проходит в направлении снизу вверх. Он связан с  $dx$  и  $dy$  соотношениями:  $dx = ds \cos \varphi$ ;  $dy = ds \sin \varphi$ . Таким образом,

$$K = -\frac{d\varphi}{dx} \cos \varphi = -\frac{d\varphi}{dy} \sin \varphi.$$

Подставляя эти выражения в (109.5), получим два уравнения:

$$\rho g y dy + \sigma \sin \varphi d\varphi = 0, \quad (109.6)$$

$$\rho g y dx + \sigma \cos \varphi d\varphi = 0. \quad (109.7)$$

Интегрируя (109.6) при начальном условии  $\varphi = \pi$  при  $y = 0$ , получим:

$$y = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (109.8)$$

Подстановка этого выражения в (109.7) приводит к уравнению

$$dx = -\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \frac{d\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}},$$

интегрирование которого при начальном условии  $x = 0$  при  $\varphi = \pi/2$  дает

$$x = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \ln \frac{(1 + \sin \frac{\varphi}{2})(\sqrt{2} - 1)}{(1 - \sin \frac{\varphi}{2})(\sqrt{2} + 1)}. \quad (109.9)$$

Формулы (109.8) и (109.9) выражают уравнение искомой поверхности в параметрической форме.

5. Определить в предыдущей задаче максимально возможную высоту поднятия пластинки над уровнем жидкости  $h$  и толщину приподнятого столба жидкости  $D$  в наиболее узком месте  $MN$  (рис. 125) при той же высоте поднятия. Найти также силу  $F$ , которую необходимо приложить к единице длины пластинки, чтобы оторвать последнюю от жидкости. Вес единицы длины пластинки равен  $q$ , ее ширина  $a$ .

Решение. Минимальная толщина столба жидкости  $D = MN$  при максимально возможной высоте поднятия  $h$  (рис. 125) определится из требования  $\varphi = 0$  при  $y = h$ . Подставляя в формулу (109.9)  $x = \frac{(a-D)}{2}$ ,  $\varphi = 0$ , получим:

$$D = a - 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} [V\sqrt{2} - \ln(V\sqrt{2} + 1)] = a - 1,066 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}. \quad (109.10)$$

Если  $a < 1,066 \sqrt{\sigma/\rho g}$ , то минимальное значение  $D$  равно нулю. В этом случае предельное значение угла  $\varphi = 0$  не достигается.

Пусть  $a > 1,066 \sqrt{\sigma/\rho g}$ . Тогда максимально возможная высота поднятия определится из формулы (109.6), если положить  $\varphi = 0$ :

$$h = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}. \quad (109.11)$$

Разность атмосферного и гидростатического давлений на пластинку направлена вниз и равна  $\rho gh$ . Поэтому

$$F = q + \rho g h a = q + 2a \sqrt{\rho g \sigma}. \quad (109.12)$$

Рассмотрим теперь второй случай:  $a < 1,066 \sqrt{\sigma/\rho g}$ . В этом случае

$$h = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \cos \frac{\varphi}{2}, \quad (109.13)$$

где  $\varphi$  определяется из трансцендентного уравнения

$$\frac{a}{2} = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \left( \frac{1}{V\sqrt{2}} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \ln \frac{(1 + \sin \frac{\varphi}{2})(V\sqrt{2} - 1)}{(1 - \sin \frac{\varphi}{2})(V\sqrt{2} + 1)}. \quad (109.14)$$

При нахождении  $F$  необходимо учесть, что в рассматриваемом случае пластинку тянет вниз дополнительная сила поверхностного натяжения  $2\sigma \sin \varphi$ . С учетом этой силы

$$F = q + 2a \sqrt{\rho g \sigma} \cos \frac{\varphi}{2} + 2\sigma \sin \varphi. \quad (109.15)$$

Если  $a \ll \sqrt{\sigma/\rho g}$ , то вторым членом в этой формуле можно пренебречь. Пренебрегая также в (109.14) членом  $a/2$ , находим  $\varphi = \pi/2$ . Таким образом, при  $a \ll \sqrt{\sigma/\rho g}$

$$F = q + 2\sigma, \quad h = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}}.$$

6. Бесконечно длинная прямоугольная пластинка ширины  $a$  положена на поверхность несмачивающей ее жидкости с поверхностным натяжением  $\sigma$ . Плотность вещества пластинки  $\rho_0$  больше плотности жидкости  $\rho$ . Найти максимальную толщину пластинки  $h$ , при которой она еще не утонет.

Решение. Примем за ось  $Y$  вертикальную прямую, касающуюся боковой поверхности жидкости, а за ось  $X$  — горизонтальную прямую, перпендикулярную

к длине пластинки и касающуюся поверхности жидкости в бесконечности (рис. 126). Уравнение боковой поверхности жидкости будет:

$$x = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \ln \frac{(1 + \cos \frac{\varphi}{2})(\sqrt{2} - 1)}{(1 - \cos \frac{\varphi}{2})(\sqrt{2} + 1)}, \quad (109.16)$$

$$y = -2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (109.17)$$

Минимальное расстояние  $D = MN$  при максимально возможной глубине погружения пластинки  $|y|_{\max}$  определится из требования  $\varphi = \pi$ , которое дает

$$D = a - 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} (\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)) = a - 1,066 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}. \quad (109.18)$$

Если  $a < 1,066 \sqrt{\sigma/\rho g}$ , то  $D = 0$ , и предельное значение угла  $\varphi = \pi$  не достигается,

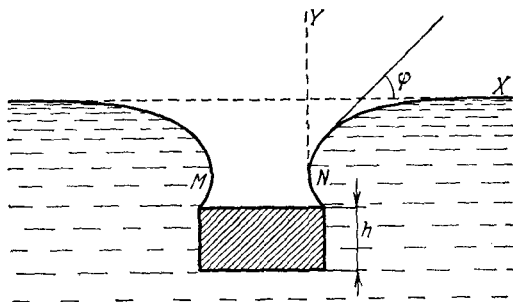


Рис. 126.

Рассмотрим сначала случай  $a > 1,066 \sqrt{\sigma/\rho g}$ . В этом случае максимальная глубина погружения верхнего основания пластинки определится из (109.17), если положить  $\varphi = \pi$ . Она равна  $|y|_{\max} = 2 \sqrt{\sigma/\rho g}$ . При этом на основание пластинки будет действовать направленная вверх разность давлений  $\rho g (h + |y|_{\max})$ , которая должна быть уравновешена весом пластинки. Максимальная толщина пластинки, при которой она еще не утонет, определится из условия  $\rho g (h + |y|_{\max}) = \rho_0 g$ , которое дает

$$h = \frac{2}{\rho_0 - \rho} \sqrt{\frac{\sigma \rho}{g}}. \quad (109.19)$$

Теперь рассмотрим случай  $a < 1,066 \sqrt{\sigma/\rho g}$ . В этом случае

$$|y|_{\max} = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (109.20)$$

где  $\varphi$  определяется из уравнения

$$\frac{a}{2} = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \ln \frac{(1 + \cos \frac{\varphi}{2})(\sqrt{2} - 1)}{(1 - \cos \frac{\varphi}{2})(\sqrt{2} + 1)}. \quad (109.21)$$

Для максимальной толщины пластинки получаем:

$$h = \frac{2}{\rho_0 - \rho} \sqrt{\frac{\sigma \rho}{g}} \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{2\sigma \sin \varphi}{g\alpha(\rho_0 - \rho)}. \quad (109.22)$$

Если  $a \ll \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$ , то первым членом справа можно пренебречь. При этом, как видно из (109.21),  $\varphi = \pi/2$ , и мы находим:

$$h = \frac{2\sigma}{g\alpha(\rho_0 - \rho)} \quad \text{или} \quad 2\sigma = gah(\rho_0 - \rho), \quad (109.23)$$

т. е. вес пластинки уравновешивается поверхностным натяжением и архимедовой подъемной силой.

7. Определить силу  $F$ , необходимую для отрыва круглой невесомой пластинки радиуса  $r = 8$  см, положенной на поверхность воды. Поверхностное натяжение воды  $\sigma = 73$  дин·см<sup>-1</sup>. Пластинка смачивается водой.

О т в е т. Пренебрегая кривизной окружности, ограничивающей пластинку, получим:

$$F \approx 2\pi r^2 \sqrt{\rho g \sigma} \approx 1,1 \text{ Н.}$$

8. Найти высоту поднятия  $h$  жидкости у вертикальной бесконечной пластинки, смачиваемой жидкостью. Краевой угол равен  $\vartheta$ .

У к а з а н и е. См. решение задачи 4.

$$\text{О т в е т.} \quad h = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g} (1 - \sin \vartheta)}.$$

9. Определить глубину  $h$  ртутной лужицы на плоском горизонтальном стекле. Поперечные размеры лужицы велики по сравнению с ее глубиной. Поверхностное натяжение ртути на границе с воздухом  $\sigma = 490$  дин·см<sup>-1</sup>, краевой угол на стекле  $\vartheta = 140^\circ$ . Плотность ртути  $\rho = 13,6$  г·см<sup>-3</sup>.

$$\text{О т в е т.} \quad h = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \sin \frac{\vartheta}{2} = 3,6 \text{ мм.}$$

10. Стальная иголка, покрытая тонким слоем парафина или жира, может плавать на поверхности воды (рис. 127). Найти радиус иголки  $r$ , ширину зазора  $D = MN$  между боковыми поверхностями жидкости в наиболее узком месте, а также глубину погружения  $H$  для различных значений угла  $\vartheta$ , образуемого

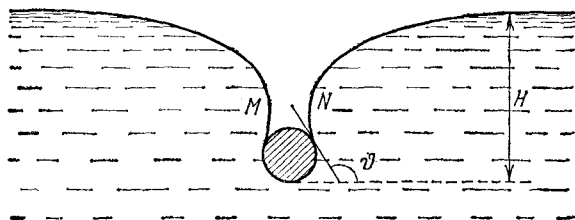


Рис. 127.

общей касательной к поверхности иголки и жидкости с горизонтальной плоскостью. Плотность стали  $\rho_0 = 7,8$  г·см<sup>-3</sup>, поверхностное натяжение воды  $\sigma = 73$  дин·см<sup>-1</sup>. Определить максимальный радиус иголки, при котором она еще не утонет. Найти максимально возможную глубину погружения и соответствующий ей радиус иголки. При расчете иголку заменить бесконечно длинным цилиндром.



Решение. В точке  $A$  (рис. 128) поверхности жидкости и иголки тангенциально расходятся. На единицу длины иголки вверх действует сила поверхностного натяжения  $F_1 = 2\sigma \sin \vartheta$ . Кроме того, на нее действует сила гидростатического давления, также направленная вверх. Если бы часть  $ACB$  иголки была заменена жидкостью, то сила гидростатического давления была бы равна

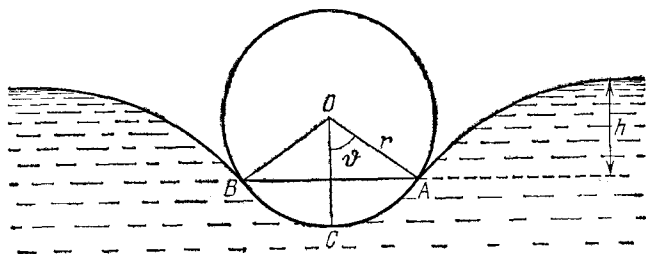


Рис. 128.

$F_2 = \rho g h \cdot AB = 2\rho g h r \sin \vartheta$ , где  $r$  — радиус иголки, а  $\rho$  — плотность жидкости. Благодаря тому, что часть  $ACB$  погружена в жидкость, на иголку дополнительно действует сила гидростатического давления  $F_3$ , равная весу воды, вытесненной частью  $ACB$ , т. е.  $F_3 = \rho g r^2 (\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta)$ . Сумма трех сил  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  должна равняться весу единицы длины иголки. Это дает:

$$2\sigma \sin \vartheta + 2\rho g h r \sin \vartheta + \rho g r^2 (\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta) = \rho_0 g \pi r^2.$$

Между углом  $\vartheta$  и высотой  $h$  существует соотношение  $h = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \sin \frac{\vartheta}{2}$  (см. решение задачи б), и предыдущее уравнение принимает вид

$$\left[ \pi \rho_0 - \rho \left( \vartheta - \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \right) \right] r^2 - 4r \sqrt{\frac{\rho \sigma}{g}} \sin \vartheta \sin \frac{\vartheta}{2} - \frac{2\sigma \sin \vartheta}{g} = 0 \quad (109.24)$$

Для  $D$  и  $H$  получаем:

$$D = 2r \sin \vartheta + 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \left( 2 \cos \frac{\vartheta}{2} + \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{4} \right) - 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} (V\sqrt{2} - \ln(V\sqrt{2} + 1)), \quad (109.25)$$

$$H = 2r \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \sin \frac{\vartheta}{2}. \quad (109.26)$$

После подстановки численных значений:

$$\left[ 24,5 - \left( \vartheta - \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \right) \right] r^2 - 1,091 \sin \vartheta \sin \frac{\vartheta}{2} \cdot r - 0,1488 \sin \vartheta = 0, \quad (109.27)$$

$$D = 2r \sin \vartheta + 1,091 \cos \frac{\vartheta}{2} + 1,256 \lg_{10} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{4} - 0,291. \quad (109.28)$$

(Предполагается, что здесь длины выражаются в сантиметрах.) Придавая  $\vartheta$  различные значения, получим следующую таблицу.

$\vartheta^\circ$	$r$ , мм	$H$ , мм	$D$ , мм	$\vartheta^\circ$	$r$ , мм	$H$ , мм	$D$ , мм
0	0	0	—	80	0,955	4,29	—
10	0,328	0,481	—	90	0,990	4,85	1,98
20	0,471	0,975	—	100	1,005	5,35	1,91
30	0,583	1,49	—	110	1,001	5,82	1,68
40	0,680	2,03	—	120	0,977	6,20	1,24
50	0,763	2,58	—	130	0,922	6,45	0,65
60	0,840	3,15	—	139	0,846	6,59	0,04
70	0,903	3,72	—	139°30'	0,842	6,60	0,00

Наибольший радиус  $r$  получается при  $\vartheta \approx 100^\circ$  и равен приблизительно 1 мм. Если  $r > 0,842$  мм, то существуют два положения равновесия иголки: одно при  $\vartheta \leq 100^\circ$ , другое при  $\vartheta \geq 100^\circ$ . Если же  $r < 0,842$  мм, то существует только одно положение равновесия с  $\vartheta \leq 60^\circ$ , так как в этом случае при  $\vartheta \geq 60^\circ$  формула (109.28) дает для  $D$  отрицательное значение. Наибольшая глубина погружения  $H$  получается при  $r \approx 0,842$  мм и равна приблизительно 6,60 мм.

11. Две вертикальные параллельные пластинки частично погружены в жидкость. Показать, что между ними будет наблюдаться притяжение, когда обе пластинки либо смачиваются, либо не смачиваются жидкостью, и отталкивание, когда одна пластинка смачивается жидкостью, а другая нет.

Решение. В случае смачивания жидкость между пластинками поднимается (рис. 129, а). Давление в поднявшейся части жидкости становится меньше давления окружающей атмосферы. Атмосферное давление стремится прижать пластинки друг к другу. В случае несмачивания (рис. 129, б) давление жидкости снаружи пластинок больше давления воздуха между ними. Появляется разность

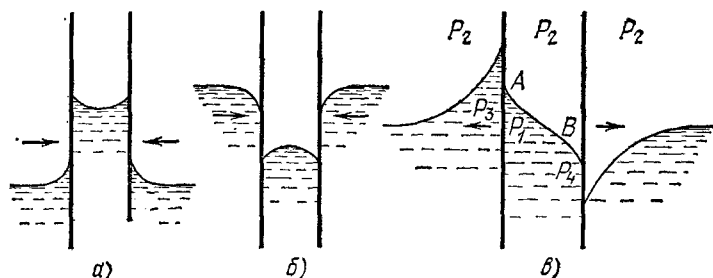


Рис. 129.

давлений, стремящаяся сблизить пластинки. Рассмотрим теперь случай, когда левая пластинка смачивается жидкостью, а правая не смачивается (рис. 129, в). Если пластинки расположены достаточно близко друг к другу, то поверхность жидкости между ними ни в одной точке не становится горизонтальной. Она имеет точку перегиба где-то между пластинками. Вследствие этого жидкость между пластинками поднимется ниже у левой пластинки и опустится меньше у правой пластинки, чем наружная жидкость. С этим обстоятельством и связано в рассматриваемом случае появление отталкивания между пластинками. Давление жидкости между пластинками в точке А равно давлению наружной жидкости  $P_2$  на той же высоте. Давление воздуха  $P_2$  больше  $P_1$ , так как поверхность жид-

кости у левой пластинки обращена к воздуху вогнутой стороной. Давление  $P_3$  убывает с высотой, тогда как  $P_2$  остается практически постоянным. Поэтому разность давлений стремится переместить левую пластинку влево. В точке  $B$  давление жидкости  $P_4$  больше  $P_2$ , так как поверхность жидкости в этой точке обращена к воздуху выпуклой стороной. Тем более это справедливо для давления ниже этой точки. В результате разность давлений  $P_4 - P_2$  будет перемещать правую пластинку вправо. Действием рассмотренных сил объясняется концентрация в кучи пузырьков воздуха, листьев, мелких щепок и прочих смачиваемых тел, плавающих на поверхности воды в стоячих водоемах.

12. Столбик жидкости, помещенный в коническую трубку, сам движется к более узкой части, когда он смачивает стенки трубки, и к более широкой части, когда не смачивает. Объяснить явление.

13. Если в трубке находится ряд капель (столбиков) какой-либо жидкости, то требуется значительное давление, чтобы продвинуть их вдоль трубки, независимо от того, смачивают они стенки трубки или не смачивают. Сопротивление смачивающих капель еще более увеличивается, когда канал трубки попеременно суживается и расширяется. При этом капли собираются в суженных частях канала. Объяснить явление.

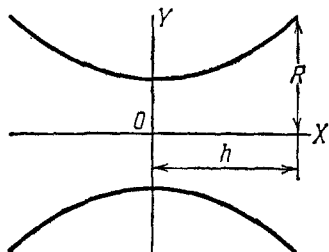


Рис. 130.

14. Определить форму мыльной пленки, края которой закреплены на двух одинаковых кольцах радиуса  $R$ , удаленных друг от друга на расстояние  $2h$ . Центры колец лежат на общей прямой, перпендикулярной к их плоскостям. Плоскости колец не затянута пленками.

Решение. Ввиду симметрии пленка является поверхностью вращения вокруг прямой, на которой лежат центры колец. Пересечем поверхность пленки произвольной

плоскостью, проходящей через эту ось, и примем ее за координатную плоскость  $XU$  (рис. 130). Так как давления по обе стороны пленки одинаковы,

то ее полная кривизна  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  должна равняться нулю. Радиус кривизны  $R_1$

нормального сечения пленки, лежащего в плоскости  $XU$ , определяется формулой  $\frac{1}{R_1} = -\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$  (величина отрицательная). Радиус кривизны перпенди-

кулярного к нему нормального сечения легко определить с помощью известной из дифференциальной геометрии теоремы Менье, согласно которой  $y = R_2 \cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между плоскостью нормального сечения и координатной плоскостью  $YZ$ . Подставляя значение  $\cos \alpha$ , получим  $R_2 = y \sqrt{1+y'^2}$  (величина положи-

тельная). Таким образом, дифференциальное уравнение, определяющее форму осевого сечения пленки, принимает вид

$$\frac{y''}{1+y'^2} - \frac{1}{y} = 0. \quad (109.29)$$

Введем подстановку  $y' = \operatorname{sh} \Theta$ . Тогда  $1 + y'^2 = \operatorname{ch}^2 \Theta$ ,  $y = \operatorname{ch} \Theta \frac{d\Theta}{dx}$ . Дифференцируя последнее соотношение и принимая во внимание, что  $y' = \operatorname{sh} \Theta$ , находим  $d^2\Theta/dx^2 = 0$ , откуда  $\Theta = ax + b$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные. Они определяются из граничных условий:  $y = R$  при  $x = \pm h$ . Очевидно  $b = 0$ , так как ввиду симметрии  $y$  должна быть четной функцией от  $x$ . Окончательно:

$$y = \frac{1}{a} \operatorname{ch} ax = \frac{1}{2a} (e^{ax} + e^{-ax}), \quad (109.30)$$

где постоянная  $a$  определяется уравнением

$$aR = \operatorname{ch} ah. \quad (109.31)$$

Поверхность пленки получается вращением кривой (109.30) вокруг оси  $X$ . Она называется *катеноидом*. Уравнение (109.31) легче всего исследовать и решать графически. Применяя этот метод, нетрудно доказать, что оно имеет решение

только при условии  $\frac{R}{h} > 1,51$ . Значит, чтобы между кольцами могла образоваться пленка, необходимо, чтобы расстояние между ними  $2h$  не превышало  $\frac{2}{1,51} R = 1,33R$ .

15. Между двумя круглыми кольцами одинакового радиуса образовалась цилиндрическая мыльная пленка, причем основания колец также затянуты мыльными пленками, имеющими, как легко показать, сферическую форму. Найти соотношение между радиусами цилиндрической и сферической частей пленок.

О т в е т. Радиус цилиндрической пленки  $r$  вдвое меньше радиуса сферических частей пленки  $R$ .

16. Решить задачу 14 в предположении, что не только боковая поверхность, но и плоскости колец затянуты мыльными пленками.

Р е ш е н и е. Форма боковой поверхности пленки определится из требования, чтобы полная кривизна ее  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  оставалась постоянной. (В отличие от задачи 14 эта постоянная, вообще говоря, отлична от нуля.) Это приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{y \sqrt{1+y'^2}} - \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \operatorname{const} \equiv 2K. \quad (109.32)$$

(Обозначения те же, что и в задаче 14.) Вводя снова подстановку  $y = \operatorname{sh} \Theta$ , получим

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \Theta} y \right) = 2Ky, \quad (109.33)$$

откуда

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \Theta} = Ky + \frac{A}{y}, \quad (109.34)$$

где  $A$  — постоянная интегрирования. Определив отсюда  $\operatorname{sh} \Theta$  с помощью формулы  $\operatorname{sh}^2 \Theta = \operatorname{ch}^2 \Theta - 1$  и вспомнив обозначение  $y = \operatorname{sh} \Theta$ , найдем:

$$x = \int \frac{Ky^2 + A}{\sqrt{y^2 - (Ky^2 + A)^2}} dy + B, \quad (109.35)$$

где  $B$  — вторая постоянная интегрирования. Постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  определяются из граничных условий:  $y = R$  при  $x = \pm h$ . Формула (109.35) совместно с этими граничными условиями и решает задачу.

Если  $A = 0$ , то интегрирование в (109.35) выполняется элементарно и дает

$$(x-a)^2 + y^2 = \frac{1}{K^2},$$

где  $a$  — постоянная интегрирования. При  $a = 0$  получается окружность радиуса  $R = 1/K$  с центром в начале координат. Это решение соответствует случаю, когда радиус колец обращается в нуль. При  $a = +1/K$  получается окружность с центром  $x = +1/K$ , а при  $a = -1/K$  — с центром  $x = -1/K$ . Обе окружности имеют один и тот же радиус  $R = 1/K$  и касаются друг друга в начале координат. Эти решения соответствуют также случаю, когда расстояние между кольцами равно удвоенному радиусу кольца.

17. В задаче 15 давление воздуха внутри пузыря слегка изменяется, вследствие чего прямолинейные образующие цилиндрической поверхности искривляются. Показать, что если искривление мало, то образующая примет форму синусоиды, причем ее период будет равен длине окружности  $2\pi r$  основания невощуженной цилиндрической пленки. Пользуясь этим результатом, доказать, что при увеличении давления воздуха внутри пузыря, когда его длина меньше  $\pi r$ , пузырь будет выпучиваться, а при уменьшении давления — сужаться. Если же длина пузыря будет больше  $\pi r$ , но меньше  $2\pi r$ , то увеличение внутреннего давления заставит боковую поверхность пленки сделаться вогнутой, а уменьшение — выпуклой.

Решение. В уравнении (109.32) пренебрежем квадратом первой производной  $y'$ . Тогда для кривизны боковой поверхности пленки  $2K$  получим

$$2K = \frac{1}{y} - y''.$$

Положим  $y = r + \eta$ , где  $\eta \ll r$ . Пренебрегая квадратом  $\eta$ , можем написать

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{r} - \frac{\eta}{r^2},$$

$$2K = \frac{1}{r} - \eta'' - \frac{\eta}{r^2}. \quad (109.36)$$

Поскольку кривизна  $2K$  постоянна, интегрирование этого уравнения дает

$$\eta = A \cos \frac{x}{r} + B \sin \frac{x}{r} + C,$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные интегрирования, а постоянная  $C$  равна  $r - 2Kr^2$ . Постоянная  $B$  равна нулю, так как функция  $\eta(x)$  должна быть четной. При  $x = \pm h$  должно быть  $\eta = 0$ , т. е.  $A \cos \frac{h}{r} + C = 0$ . Следовательно,

$$\eta = A \left( \cos \frac{x}{r} - \cos \frac{h}{r} \right).$$

Таким образом, образующая цилиндра принимает форму синусоиды. Для кривизны боковой поверхности из (109.36) получаем

$$2K = \frac{1}{r} + \frac{A}{r^2} \cos \frac{h}{r}.$$

При увеличении давления внутри пузыря кривизна  $2K$  должна увеличиваться. Если  $\frac{h}{r} < \frac{\pi}{2}$ , т. е. длина пузыря  $2h$  меньше  $\pi r$ , то  $\cos \frac{h}{r} > 0$ . Поэтому постоянная  $A$  должна быть положительной. Значит, при увеличении давления внутри пузыря его боковая поверхность будет выпучиваться. Если же  $\frac{h}{r} > \frac{\pi}{2}$ , т. е. длина пузыря  $2h$  больше  $\pi r$ , то  $\cos \frac{h}{r} < 0$ . В этом случае постоянная  $A$  отрицательна, и при увеличении давления боковая поверхность пузыря будет вдавливаться.

18. Струя жидкости вытекает через трубку в дне сосуда (рис. 131). Поперечное сечение трубки имеет форму эллипса, вытянутого в горизонтальном направлении. Струя принимает форму цепи, звенья которой попеременно то вытянуты, то сплюснуты в горизонтальном направлении. Объяснить явление. Пользуясь соображениями размерности, найти зависимость длины звена  $l$  в начальной части струи от плотности жидкости  $\rho$ , поверхностного натяжения  $\sigma$ , расстояния  $h$  между основанием трубки и уровнем жидкости, а также от ускорения силы тяже-

сти  $g$ , если поперечное сечение трубки остается неизменным. На наблюдении этого явления основан метод Релея измерения поверхностного натяжения жидкостей.

Ответ.  $l \sim \sqrt{\frac{\rho g h}{\sigma}}$ .

19. Мыльный пузырь выдут через цилиндрическую трубку с внутренним радиусом  $r = 1$  мм и длиной  $l = 10$  см. В тот момент, когда радиус пузыря достигает значения  $R_0 = 10$  см, перестают дуть, и воздух из пузыря начинает выходить через трубку. Через какое время, начиная с этого момента, пузырь исчезнет? Поверхностное натяжение мыльного раствора  $\sigma = 50$  дин/см, коэффициент вязкости воздуха  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-4}$  г/(с·см). Изменением плотности воздуха за время процесса пренебречь.

Ответ. Время  $t$  связано с радиусом пузыря соотношением  $t = \frac{2\eta l}{\sigma r^4} (R_0^4 - R^4)$ . Пузырь исчезнет через  $t = \frac{2\eta l}{\sigma r^4} R_0^4 = 7,2 \cdot 10^3$  с = 2 ч.

20. На какую величину  $\Delta T$  температура воздуха внутри мыльного пузыря должна превышать температуру окружающего воздуха  $T$ , чтобы пузырь стал подниматься? Радиус пузыря равен  $r$ , поверхностное натяжение мыльной пленки  $\sigma$ . Массой пленки можно пренебречь. Учтем, что давление воздуха внутри пузыря мало отличается от атмосферного давления  $P$ .

Ответ.  $\Delta T > \frac{4\sigma T}{Pr}$ .

21. Чтобы стряхнуть ртуть в медицинском термометре, нужно ускорение  $a \sim 10g$ . Оценить диаметр перетяжки в капилляре термометра. Коэффициент поверхностного натяжения ртути  $\sigma = 490$  дин/см, длина столбика ртути выше перетяжки:  $h \sim 5$  см, плотность ртути  $\rho = 13,6$  г/см<sup>3</sup>.

Ответ.  $r = \frac{2\sigma}{\rho h a} \approx \frac{\sigma}{5\rho g h} \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$  см.

22. На сколько изменится по сравнению с  $C_p$  молярная теплоемкость идеального газа  $C$ , если его нагревать внутри мыльного пузыря радиуса  $r = 1$  см? Поверхностное натяжение мыльного раствора  $\sigma = 50$  дин/см. Зависимостью от температуры пренебречь. Давление вне пузыря  $P_0 = 1$  атм.

Ответ.  $C - C_p = \frac{4\sigma R}{3P_0 r} = \frac{2}{3} R \cdot 10^{-4} = 1,33 \cdot 10^{-4}$  кал/(К·моль).

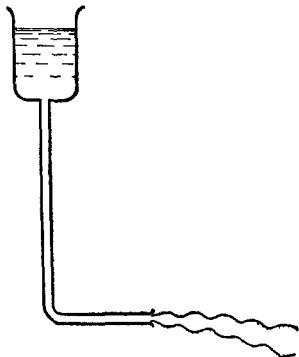


Рис. 131.

## § 110. Капиллярно-гравитационные волны малой амплитуды

1. Капиллярно-гравитационными волнами называются волны, распространяющиеся по поверхности жидкости под действием сил поверхностного натяжения и силы тяжести.

Для понимания настоящего параграфа требуется знакомство с некоторыми понятиями, относящимися к учению о волнах, которые будут подробно изложены в третьем томе нашего курса. Читатель, не знакомый с этими понятиями, может пропустить этот параграф без ущерба для понимания дальнейшего. Ограничимся рассмотрением капиллярно-гравитационных волн малой амплитуды. Так называются волны, амплитуда которых мала по сравнению с длиной волны. Мы будем также считать жидкость глубокой, т. е. рассмотрим случай, когда глубина жидкости значительно больше длины волны.