сти g, если поперечное сечение трубки остается неизменным. На наблюдении этого явления основан метод Релея измерения поверхностного натяжения жидкостей.

Ответ. $l \sim \sqrt{\frac{\rho g h}{\sigma}}$.

19. Мыльный пузырь выдут через цилиндрическую трубку с внутренним радиусом $r = 1$ мм и длиной $l = 10$ см. В тот момент, когда радиус пузыря достигает значения $R_0 = 10$ см, перестают дуть, и воздух из пузыря начинает выходить через трубку. Через какое время, начиная с этого момента, пузырь исчезнет? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 50$ дин/см, коэффициент вязкости воздуха $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ г/(с·см). Изменением плотности воздуха за время процесса пренебречь.

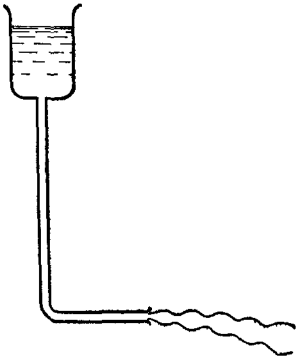

Рис. 131.

Ответ. Время t связано с радиусом пузыря соотношением $t = \frac{2\eta l}{\sigma r^4}(R_0^4 - R^4)$. Пузырь исчезнет через $t = \frac{2\eta l}{\sigma r^4} R_0^4 = 7{,}2 \cdot 10^3$ с $= 2$ ч.

20. На какую величину ΔT температура воздуха внутри мыльного пузыря должна превышать температуру окружающего воздуха T, чтобы пузырь стал подниматься? Радиус пузыря равен r, поверхностное натяжение мыльной пленки σ. Массой пленки можно пренебречь. Учесть, что давление воздуха внутри пузыря мало отличается от атмосферного давления P.

Ответ. $\Delta T > \frac{4\sigma T}{Pr}$.

21. Чтобы стряхнуть ртуть в медицинском термометре, нужно ускорение $a \sim 10g$. Оценить диаметр перетяжки в капилляре термометра. Коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma = 490$ дин/см, длина столбика ртути выше перетяжки: $h \sim 5$ см, плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3.

Ответ. $r = \frac{2\sigma}{a\rho h} \approx \frac{\sigma}{5\rho g h} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ см.

22. На сколько изменится по сравнению с C_P молярная теплоемкость идеального газа C, если его нагревать внутри мыльного пузыря радиуса $r = 1$ см? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 50$ дин/см. Зависимостью σ от температуры пренебречь. Давление вне пузыря $P_0 = 1$ атм.

Ответ. $C - C_P = \frac{4\sigma R}{3P_0 r} = \frac{2}{3} R \cdot 10^{-4} = 1{,}33 \cdot 10^{-4}$ кал/(К · моль).

§ 110. Капиллярно-гравитационные волны малой амплитуды

1. *Капиллярно-гравитационными волнами называются волны, распространяющиеся по поверхности жидкости под действием сил поверхностного натяжения и силы тяжести.*

Для понимания настоящего параграфа требуется знакомство с некоторыми понятиями, относящимися к учению о волнах, которые будут подробно изложены в третьем томе нашего курса. Читатель, не знакомый с этими понятиями, может пропустить этот параграф без ущерба для понимания дальнейшего. Ограничимся рассмотрением капиллярно-гравитационных *волн малой амплитуды*. Так называются волны, амплитуда которых мала по сравнению с длиной волны. Мы будем также считать жидкость *глубокой*, т. е. рассмотрим случай, когда глубина жидкости значительно больше длины волны.

Найдем выражение для скорости распространения капиллярно-гравитационных волн. Это можно сделать очень просто, если воспользоваться следующим результатом, вытекающим из уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости. *В плоской бегущей синусоидальной волне малой амплитуды каждая частица жидкости движется по окружности, расположенной в вертикальной плоскости, проходящей через направление распространения волны.* Радиус окружности r мал по сравнению с длиной волны λ. Он убывает экспоненциально при удалении от поверхности жидкости. Однако знание конкретного закона, по которому происходит такое убывание, для последующих рассуждений не требуется. Существенно только то, что на поверхности жидкости амплитуда колебаний максимальна, а далеко от нее (на расстояниях $\gg\lambda$) обращается в нуль.

Если точки поверхности жидкости, расположенные на некоторой прямой, заставить совершать гармоническое колебательное движение, то вдоль поверхности жидкости перпендикулярно к этой прямой побежит капиллярно-гравитационная волна, скорость распространения которой обозначим c. В неподвижной системе отсчета, как уже сказано, каждая частица жидкости движется по окружности. Рассмотрим явление в системе отсчета, равномерно движущейся со скоростью c. В этой системе волны будут стоять на месте. Движение частицы будет слагаться из равномерно-поступательного со скоростью c и равномерного вращения по окружности радиуса r. Так как радиус r предполагается малым по сравнению с длиной волны λ, то можно пренебречь горизонтальными колебаниями частицы. Если ось X направить по невозмущенной поверхности жидкости в сторону распространения волны, а ось Z — вертикально вниз, то в указанном приближении движение частицы на поверхности жидкости изобразится уравнениями

$$x=ct,\quad z=r\sin\frac{2\pi ct}{\lambda}. \tag{110.1}$$

Форма траектории найдется отсюда исключением времени t, что дает

$$z=r\sin\frac{2\pi x}{\lambda}. \tag{110.2}$$

Это — синусоида. Частицы, расположенные не на поверхности, а в глубине жидкости, также движутся по синусоидам. Но для них радиус r меньше — он убывает с глубиной.

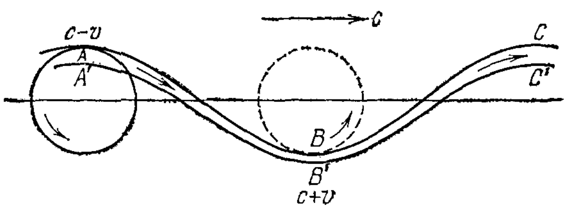

Рис. 132.

2. На рис. 132 верхняя синусоида ABC представляет траекторию частицы на поверхности жидкости, а $A'B'C'$ — бесконечно близкой к ней частицы в глубине жидкости. В рассматриваемой системе отсчета течение жидкости стационарно. Пространство между поверхностями ABC и $A'B'C'$ представляет собой трубку тока. Применим к ней уравнение Бернулли. Если v — скорость движения жидкости по окружности, то в точке A, где поступательное и вращательное движения вычитаются, полная скорость жидкости будет $c-v$, а в точке B, где они складываются, $c+v$. Разность высот точек A и B равна $h=2r$. Поэтому по уравнению Бернулли

$$P_A+\frac{\rho}{2}(c-v)^2+2\rho gr=P_B+\frac{\rho}{2}(c+v)^2,$$

или

$$2\rho c v = 2\rho g r + (P_A - P_B). \tag{110.3}$$

Очевидно

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi r c}{\lambda}. \tag{110.4}$$

Давления жидкости в точках A и B по формуле Лапласа равны соответственно

$$P_A = P_0 + \sigma K, \quad P_B = P_0 - \sigma K, \tag{110.5}$$

где K — абсолютное значение кривизны синусоиды в точке A или B. Поскольку в этих точках первая производная dz/dx равна нулю, для кривизны K получаем из (110.2):

$$K = \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| = \frac{4\pi^2 r}{\lambda^2}. \tag{110.6}$$

Из (110.3) с учетом (110.4), (110.5) и (110.6) получаем формулу для скорости распространения капиллярно-гравитационных волн:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}. \tag{110.7}$$

Заметим, что в теории волн величина c называется *фазовой скоростью,* т. е. скоростью, с которой распространяется фаза волны. Эта скорость зависит от длины волны, т. е. *капиллярно-гравитационные волны обладают дисперсией.*

3. Для длинных волн, когда $\frac{g\lambda}{2\pi} \gg \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}$, т. е. $\lambda \gg 2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$, поверхностное натяжение не играет роли, и формула (110.7) переходит в

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \tag{110.8}$$

В этом случае волны называются *гравитационными.*

В другом предельном случае, когда $\lambda \ll 2\pi\sqrt{\sigma/\rho g}$, наоборот, несущественно действие силы тяжести. В этом случае волны называются *капиллярными.* Для их скорости распространения получаем

$$c = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}. \tag{110.9}$$

Наблюдение капиллярных волн дает удобный метод измерения поверхностного натяжения жидкостей. На поверхности жидкости возбуждаются круговые капиллярные волны колебаниями погруженного в нее штифта. Измеряется частота колебаний $\nu = c/\lambda$ и длина волны λ. Поверхностное натяжение рассчитывается по формуле

$$\sigma = \frac{\rho\lambda^3\nu^2}{2\pi}. \tag{110.10}$$

4. В качестве дополнения к настоящему параграфу докажем те следствия уравнений гидродинамики, на которых основывались наши рассуждения. Во-первых, мы исходим из условия сохранения массы жидкости. Если жидкость несжимаемая, то это условие в нашем случае записывается в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{110.11}$$

(уравнение непрерывности). Во-вторых, мы пользуемся уравнением Эйлера для малых колебаний жидкости

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad} P. \tag{110.12}$$

В этих уравнениях скорость $\boldsymbol{v}$ рассматривается как функция времени и координат точки пространства, к которой эта скорость относится. В точном уравнении Эйлера в левой части (110.12) должно было бы стоять ускорение частицы $d\boldsymbol{v}/dt$, а не частная производная $\partial\boldsymbol{v}/\partial t$. Эта частная производная показывает лишь, как меняется во времени скорость различных частиц, проходящих через одну и ту же точку пространства. Для вычисления же ускорения надо было бы сравнивать скорости одной и той же частицы в различные моменты времени (в которые частица занимает различные положения в пространстве). Однако для малых колебаний это различие можно не принимать во внимание и писать уравнение Эйлера в упрощенной форме (110.12). Переходя к координатной форме записи, получим из (110.12)

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}=-\frac{\partial P}{\partial x},\quad \rho\frac{\partial v_z}{\partial t}=-\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Дифференцируя первое уравнение по z, а второе по x, исключим P:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)=0. \tag{110.13}$$

Допустим теперь, что в жидкости распространяется синусоидальная волна:

$$v_x=v_{0x}(z)\cos(\omega t-kx),$$

$$v_z=v_{0z}(z)\sin(\omega t-kx+\delta),$$

где ω, k, δ — постоянные. Дифференцируя и подставляя полученные выражения в уравнение (110.11), получим

$$kv_{0x}(z)\sin(\omega t-kx)+\frac{dv_{0z}}{dz}\sin(\omega t-kx+\delta)=0.$$

Это соотношение должно соблюдаться в любой момент времени, что возможно лишь при выполнении условий $\delta=0$ и

$$kv_{0x}(z)+\frac{dv_{0z}}{dz}=0.$$

(Другую возможность: $\delta=\pi$ можно не рассматривать, так как она сводится к предыдущей изменением знака у v_{0z}.) Аналогичным образом из уравнения (110.13) получаем

$$kv_{0z}(z)+\frac{dv_{0x}}{dz}=0.$$

Сравнивая эти два уравнения, находим

$$v_{0x}\,dv_{0x}=v_{0z}\,dv_{0z}.$$

Отсюда $v_{0x}^2=v_{0z}^2+\text{const}$. Постоянная интегрирования здесь равна нулю, так как на дне сосуда, в который налита жидкость, скорость обращается в нуль. Итак, $v_{0x}=v_{0z}\equiv C(z)$, а потому

$$v_x=C(z)\cos(\omega t-kx),\quad v_z=C(z)\sin(\omega t-kx).$$

Интегрируя по времени, находим

$$x-x_0=\frac{C(z)}{\omega}\sin(\omega t-kx),\quad z-z_0=-\frac{C(z)}{\omega}\cos(\omega t-kx).$$

Отсюда видно, что траекторией частицы является окружность радиуса $r=\dfrac{C(z)}{\omega}$.