Но этот базис совпадает с базисом (130.6). Поэтому будут совпадать и соответствующие им обратные решетки. В общем случае переход к новому базису может быть выполнен путем частных преобразований типа (130.8). Поэтому заключение остается в силе и этом случае.

## § 131. Кристаллические системы

1. Помимо трансляционной симметрии кристаллическая решетка может обладать и другими элементами симметрии. Так, всякая примитивная пространственная решетка имеет центр симметрии. Центром симметрии, как легко видеть, является каждая вершина и центр примитивного параллелепипеда решетки, а также середины его ребер и центры граней. Базис однозначно определяет примитивную решетку. Обратное несправедливо — для одной и той же решетки базис может быть выбран бесконечным множеством способов. Поэтому симметрия базисного параллелепипеда, вообще говоря, не совпадает с симметрией построенной на нем решетки.

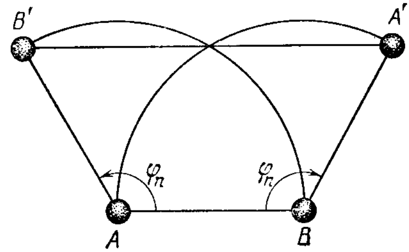


Рис. 163.

2. Тела конечных размеров, например молекулы, могут обладать поворотными и зеркально-поворотными осями симметрии любого порядка. Неограниченные кристаллические решетки, как примитивные, так и сложные, благодаря наличию у них трансляционной симметрии, ведут себя иначе. *Поворотные и зеркально-поворотные оси симметрии кристаллической решетки могут быть только осями 2-го, 3-го, 4-го и 6-го порядков. Другие оси в кристаллической решетке невозможны.* Для доказательства возьмем какие-либо два идентичные соседние узла $A$ и $B$ на узловой линии $AB$, т. е. прямой, содержащей бесконечное множество атомов решетки (рис. 163). Если через узел $A$ проходит поворотная ось $n$-го порядка, то параллельная ей прямая, проходящая через узел $B$, будет также поворотной осью того же порядка. Закрепим эти оси неподвижно в пространстве и условимся называть их осями $A$ и $B$. Повернем всю решетку вокруг оси $B$ на угол $\varphi \equiv \varphi_n = 2\pi/n$. Атом, находившийся в точке $A$, перейдет в $A'$, причем вся решетка совместится сама с собой. Место атома в точке $A$ займет другой в точности такой же атом. Произведем теперь поворот на тот же угол $\varphi$ вокруг оси $A$, но в противоположном направлении. Решетка опять совместится сама с собой. Атом, находившийся в точке $B$, перейдет в положение $B'$; атомы в точках $B$ и $A'$ заменятся другими совершенно такими же атомами. Если точки $A'$ и $B'$ совпадают между собой, то $\varphi =$ $= 60°$, и оси $A$ и $B$ будут поворотными осями шестого порядка. Если же точки $A'$ и $B'$ не совпадают между собой, то прямая $B'A'$

будет узловой прямой решетки, так как она параллельна прямой $AB$. По условию $A$ и $B$ — соседние идентичные узлы на прямой $AB$, а потому длина $AB$ является основным периодом для обеих узловых линий $AB$ и $B'A'$. Значит, длина $B'A'$ должна быть кратна длине $AB$. Но $B'A' = AB\,(1 - 2\cos\varphi)$. Поэтому число $1 - 2\cos\varphi$ должно быть целым (случай, когда оно обращается в нуль, т. е. когда $\cos\varphi = {}^1/_2$, рассмотрен выше). Это возможно тогда и только тогда, когда $\cos\varphi = 0, -{}^1/_2, -1$. Таким значениям соответствуют углы поворота $\varphi = 90°, 120°, 180°$, т. е. поворотные оси 4-го, 3-го и 2-го порядков. Сочетая соответствующий поворот с отражением в плоскости, легко распространить приведенное доказательство и на зеркально-поворотные оси симметрии.

3. Сложная пространственная решетка состоит из примитивных решеток (решеток Браве). По симметрии примитивных решеток все кристаллы разделяются на семь кристаллических систем. Под симметрией здесь понимается *точечная симметрия*, включающая в себя все элементы симметрии, за исключением трансляционных, т. е. центр, плоскости и поворотные оси симметрии различных порядков. В сущности, разделение кристаллов на кристаллические системы производится по числу поворотных осей симметрии различных порядков, которыми обладает решетка Браве.

Напомним, что симметрия пространственной решетки не всегда совпадает с симметрией основного параллелепипеда, на котором построена решетка. Однако Браве заметил, что из всякой примитивной решетки, за исключением гексагональной, можно выделить параллелепипед, содержащий все те элементы симметрии (за исключением, конечно, трансляционных), что и решетка в целом. Наименьший из таких параллелепипедов называется *параллелепипедом Браве*. Если он вырождается в куб, то мы будем называть его *кубом Браве*. Браве доказал, что могут существовать шесть типов примитивных решеток, для которых параллелепипед Браве — примитивный. Если к ним присоединить гексагональную решетку, то получится всего 7 типов решеток, охватывающих всевозможные комбинации элементов симметрии решеток Браве. Центрирование граней и объемов параллелепипедов Браве не изменяет симметрию решетки. Однако оно приводит к появлению еще 7 новых типов решеток Браве. Таким образом, существует всего 14 типов решеток Браве, распределяющихся по 7 кристаллическим системам. Опишем эти системы и соответствующие им решетки Браве.

К у б и ч е с к а я с и с т е м а. Решетки этой системы наиболее симметричны. Параллелепипедом Браве является куб (рис. 164). Существуют три типа решеток Браве кубической системы: *простая* (обозначается через $P$), *объемноцентрированная* (обозначается через $I$) и *гранецентрированная* (обозначается через $F$). Как указывалось в § 130 (пункт 4), параллелепипед Браве простой кубической решетки является также основным параллелепипедом. Для

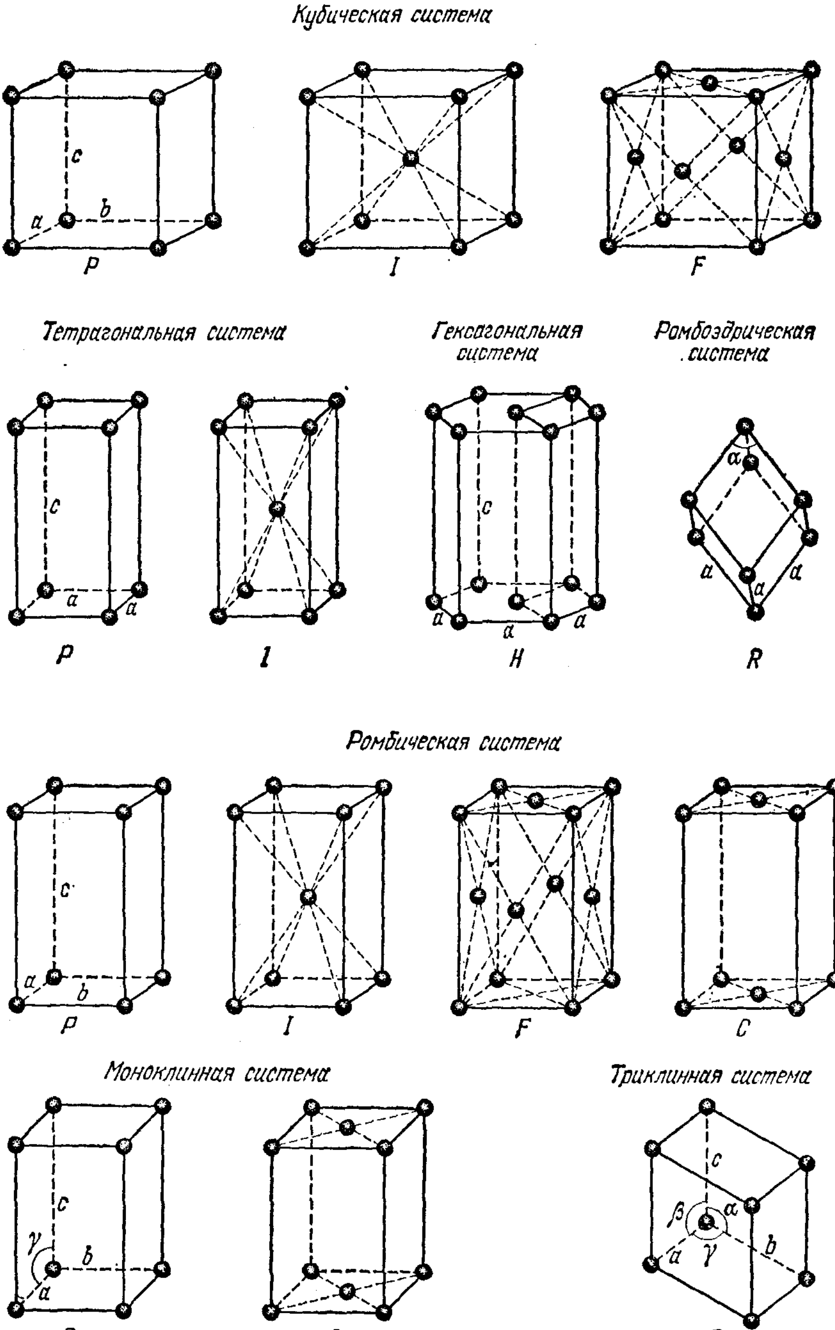

Кубическая система
P
I
F
Тетрагональная система
P
I
Гексагональная система
H
Ромбоэдрическая система
R
Ромбическая система
P
I
F
C
Моноклинная система
P
C
Триклинная система
P

Рис. 164.

остальных двух решеток основные параллелепипеды косоугольные, а потому эти параллелепипеды характеризуются более низкой симметрией, чем сами решетки. Длина ребра куба Браве для всех трех кубических решеток является единственным *пространственным параметром* решетки. Эту длину называют постоянной решетки и обычно обозначают через $a$. Кристаллические решетки кубической системы имеют 13 поворотных осей симметрии: 6 осей второго порядка, 4 оси третьего порядка и 3 оси четвертого порядка. Оси симметрии второго порядка соединяют центры противоположных ребер куба Браве, третьего — противоположные вершины его, а четвертого — центры противоположных граней.

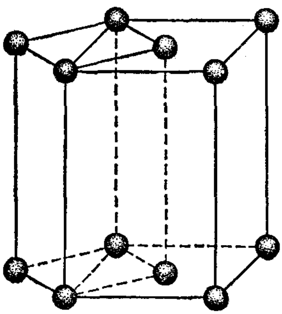


Рис. 165.

Т е т р а г о н а л ь н а я (или к в а д р а т н а я) система. Параллелепипед Браве имеет форму прямой квадратной призмы (рис. 164). Наряду с примитивной решеткой ($P$) существует еще объемноцентрированная решетка ($I$). Центрирование оснований не дает решеток нового типа. Оно приводит к разделению исходной решетки на две примитивные решетки того же типа, что и исходная решетка. Это видно из рис. 165. Не дает ничего нового и центрирование всех граней исходной решетки. Оно превращает последнюю в объемноцентрированные решетки той же системы. Таким образом, существуют только две решетки Браве тетрагональной системы: *простая* и *объемноцентрированная*. Они имеют 4 поворотных оси симметрии второго и одну ось симметрии четвертого порядков. Последняя соединяет центры квадратных оснований, а первые — центры боковых граней и середины ребер параллелепипеда Браве. Тетрагональная решетка определяется двумя параметрами: длиной стороны $a$ квадратного основания параллелепипеда Браве и его высотой $c$.

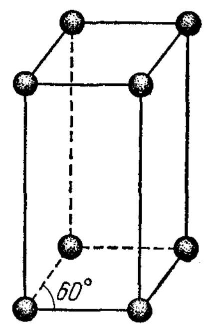



Рис. 166.

Г е к с а г о н а л ь н а я с и с т е м а (ее решетка обозначается $H$). Для кристаллов этой системы понятие параллелепипеда Браве теряет смысл. Основной параллелепипед имеет форму прямой призмы, основанием которой служит ромб с острым углом 60° (рис. 166). Однако такой параллелепипед не передает симметрию пространственной решетки в целом. Для достижения этого три таких параллелепипеда соединяют вместе, чтобы они образовывали правильную шестигранную призму. Последняя полностью характеризует симметрию решетки. Узлы пространственной решетки располагаются в вершинах таких шестигранных призм и в центрах их оснований. Гексагональная решетка определяется двумя параметрами: длиной стороны основания $a$ и высотой $c$ призмы. Решетка имеет ось симметрии шестого порядка и 6 поворотных осей симметрии второго порядка, перпендикулярных к этой оси.

Ромбоэдрическая система (решетка обозначается символом $R$). Параллелепипед Браве имеет форму ромбоэдра. Последний можно получить путем равномерного растяжения или сжатия куба в направлении его пространственной диагонали. Все грани ромбоэдра представляют собой одинаковые ромбы. Единственная решетка Браве такой системы является простой. Она характеризуется двумя параметрами: длиной $a$ ребер параллелепипеда Браве и углом $\alpha$ между ними (при $\alpha = 90°$ ромбоэдр переходит в куб). Четыре пространственные диагонали куба являются поворотными осями симметрии третьего порядка. При растяжении или сжатии вдоль одной из этих диагоналей она продолжает оставаться осью симметрии третьего порядка. Другие три диагонали переходят в оси симметрии второго порядка. Оставшиеся семь осей симметрии куба утрачивают свойство симметрии. Таким образом, ромбоэдрическая решетка имеет четыре поворотных оси симметрии: одну третьего и три второго порядков.

Ромбическая или ортогональная система. Параллелепипед Браве — прямоугольный с тремя различными длинами ребер $a$, $b$, $c$, являющимися параметрами решетки. Существуют четыре типа решеток Браве рассматриваемой системы: *простая* ($P$), *объемноцентрированная* ($I$), *гранецентрированная* ($F$) и *базоцентрированная* ($C$), т. е. решетка с центрированными основаниями. Осей симметрии три. Они параллельны ребрам параллелепипеда Браве и являются осями второго порядка.

Моноклинная система. Параллелепипедом Браве является прямой параллелепипед. Основание его есть произвольный параллелограмм. Моноклинная решетка характеризуется четырьмя параметрами — длинами $a$, $b$, $c$ ребер параллелепипеда Браве и углом $\beta$ между двумя из них (остальные углы — прямые). Она имеет единственную ось симметрии второго порядка, которая соединяет центры оснований параллелепипеда Браве.

Триклинная система. Решетки этой системы — только простые ($P$). Параллелепипед Браве может быть произвольной формы. Поэтому решетки триклинной системы характеризуются наименьшей степенью симметрии. Они имеют только центр симметрии и не имеют осей симметрии. Параметрами решетки являются длины ребер параллелепипеда Браве $a$, $b$, $c$ и углы между ними $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

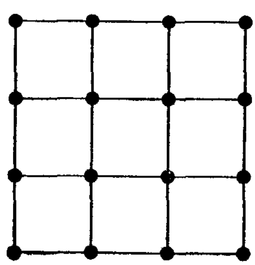
Принадлежность решетки Браве к какой-либо кристаллической системе однозначно определяется числом и характером осей симметрии. Это видно из следующей таблицы.

| Системы | Число осей симметрии | | | | Общее число осей симметрии |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2-го порядка | 3-го порядка | 4-го порядка | 6-го порядка | |
| Кубическая | 6 | 4 | 3 | — | 13 |
| Тетрагональная | 4 | — | 1 | — | 5 |
| Гексагональная | 6 | — | — | 1 | 7 |
| Ромбоэдрическая | 3 | 1 | — | — | 4 |
| Ромбическая | 3 | — | — | — | 3 |
| Моноклинная | 1 | — | — | — | 1 |
| Триклинная | — | — | — | — | — |

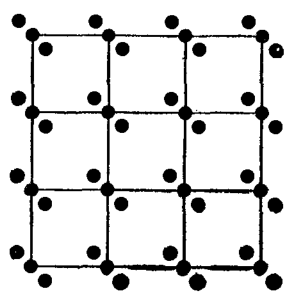
Все 14 типов решеток Браве были найдены им из геометрических соображений без использования каких бы то ни было физических принципов. Поэтому они могут быть охарактеризованы как *геометрически возможные*. Все они действительно встречаются в природе. Но в этом мы убеждаемся в *результате наблюдений*, а не путем геометрических рассуждений. Это замечание полностью относится и к последующему изложению, где говорится о пространственных группах и кристаллических классах.

## § 132. Пространственные группы и кристаллические классы

1. Примитивные пространственные решетки, из которых состоит сложная кристаллическая решетка, могут существенно отличаться от нее своей симметрией. Рассмотрим, например, тетрагональную



а)



б)

Рис. 167.

примитивную решетку, основание которой изображено на рис. 167, *а*. Через каждый узел проходит поворотная ось симметрии четвертого порядка, перпендикулярная к плоскости рисунка. Вдвинем в эту решетку две такие же примитивные решетки, как показано