Лекция 1

Уравнения в частных производных

1.1 Основные понятия

Определение 1.1. *Уравнением в частных производных* называется уравнение

$$\mathcal{F}\left(x; u; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0, \tag{1.1}$$

где $\mathcal{F}$ — произвольная функция многих переменных, которую мы будем полагать гладкой, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — действительный вектор из n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $u = u(x)$ — неизвестная функция,[1] $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$.

Мы не будем обсуждать степень гладкости функции $\mathcal{F}$, полагая ее дифференцируемой столько раз, сколько нам потребуется. *Порядком* уравнения называется порядок m старшей производной, входящей в **(1.1)**. Если линейная комбинация двух решений снова является решением, уравнение называют *линейным*. Линейное уравнение можно записать в виде $\hat{L}u = b(x)$, где линейный оператор равен сумме

$$\hat{L} = a_0(x) + \sum_{i=1}^{n} a_1^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\substack{k_1.k_2,\dots,k_n \geqslant 0 \\ k_1+k_2+\dots=2}} a_2^{k_1\,k_2\,\dots\,k_n}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}} + \dots$$
$$+ \sum_{\substack{k_1.k_2,\dots,k_n \geqslant 0 \\ k_1+k_2+\dots=m}} a_m^{k_1\,k_2\,\dots\,k_n}(x)\frac{\partial^m}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}.$$

Если $b = 0$, уравнение называется *однородным*.

Общим решением называется решение, зависящее от произвольной функции. Здесь проявляется отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, в

[1] В примерах мы будем использовать обозначения x, y, z для координат, а не для векторов.

которых общее решение зависит от произвольных постоянных. Количество произвольных функций в наиболее общем решении совпадает с порядком уравнения m, а количество переменных каждой функции равно $n-1$. Уравнения математической физики обычно (но не всегда) являются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Чтобы выделить *частное решение*, требуются начальные или граничные условия. Уравнение вместе с условиями называется *задачей*.

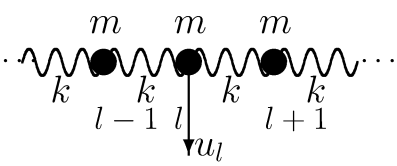
Пример 1.1. Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

в плоскости (x, y) имеет общее решение $u(x, y) = f(y)$, где f — произвольная функция. Обыкновенное уравнение имело бы общее решение, равное константе. В данном примере $m = 1, n = 2$, поэтому наиболее общее решение дается одной функцией одной переменной. Если к уравнению добавлено начальное условие $u(0, y) = \sin y$, то функцию $f(y) = \sin y$ легко найти и мы получим частное решение.

1.2 Примеры из физики

Колебания струны



Цепочка с одинаковыми грузиками массы m, соединенными одинаковыми пружинками жесткости k описывается в классической механике системой обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [1, §7]). Пусть u_l — малое вертикальное отклонение l-го грузика от положения равновесия. Тогда уравнение движения грузика будет

$$m\frac{d^2}{dt^2}u_l = -ku_{l-1} + 2ku_l - ku_{l+1}. \tag{1.2}$$

Возвращающая сила равна $F_l = -Tu_l/a$, где a — расстояние между соседними грузиками, а T — сила натяжения, откуда жесткость равна $k = T/a$. Чтобы перейти к пределу непрерывной однородной струны, надо вместо массы поставить $m \to \rho a$, где ρ — линейная плотность. Вместо номера грузика введем его координату вдоль цепочки $x = la$, тогда разлагая в ряд Тейлора вблизи l-го грузика и устремляя $a \to 0$ при фиксированных T, ρ, найдем

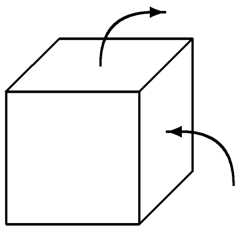
$$u_{l\pm 1} = u_l \pm \frac{\partial u}{\partial x}a + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{a^2}{2} + \ldots.$$

Подставляя разложение в уравнения движения (1.2), получим

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1.3}$$

где $c = \sqrt{T/\rho}$ — скорость распространения возмущения в струне. Получилось линейное уравнение второго порядка, называемое *одномерным волновым* (или *телеграфным*) уравнением.

Гидродинамика идеальной жидкости



Чтобы вывести уравнения движения идеальной жидкости, введем ее плотность $\rho(\mathbf{r}, t)$ и скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ как функции точки наблюдения $\mathbf{r}$ в данный момент времени t (координаты Эйлера). Рассмотрим некоторый объем V. Жидкость может попадать в него и вытекать обратно только через поверхность. Плотность потока равна $\rho\mathbf{v}$, поэтому изменение массы в данном объеме равно потоку через его поверхность

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\oint \rho\mathbf{v}\, d\mathbf{S}.$$

Здесь $\mathbf{S}$ — элемент поверхности ориентированный вдоль внешней нормали, как принято в математическом анализе. Пользуясь теоремой Гаусса, от интегральной форме можно перейти к дифференциальной. Получится *уравнение непрерывности*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{1.4}$$

Аналогично можно рассмотреть поток импульса, втекающий в тот же объем и, пренебрегая вязкостью, вывести *уравнение Эйлера* [2, §2]

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}. \tag{1.5}$$

Получилась система уравнений в частных производных, на этот раз первого порядка и нелинейных. Всего у нас 4 уравнения на 5 неизвестных функций. Когда движение идеальной жидкости изоэнтропическое, можно записать правую часть уравнения (1.5) как $-\nabla w$, где w — тепловая функция (энтальпия) единицы массы жидкости [2]. Выражение давления $p = p(\rho, \mathbf{v})$ как функции плотности и скорости (*уравнение состояния*) замыкает систему уравнений гидродинамики.

Система уравнений гидродинамики имеет стационарное решение $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}, p = p_0 = \mathrm{const}, \mathbf{v} = 0$. Разлагая неизвестные функции в ряд

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 + \rho_1(\mathbf{r}, t), \quad p(\mathbf{r}, t) = p_0 + p_1(\mathbf{r}, t),$$

считая скорость и поправки к плотности и давлению малыми величинами и ограничиваясь первым порядком малости, получим линеаризованные уравнения

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \rho_0\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p_1}{\rho_0}.$$

Если теперь продифференцировать первое из уравнений по времени, переставив порядок дифференцирования во втором слагаемом, мы найдем уравнение акустики

$$\Box\,\rho_1 = 0, \quad \Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle, \tag{1.6}$$

трехмерное волновое уравнение, в котором для краткости используют обозначение $\Box$, оператор *Даламбера*. Скорость распространения возмущений c находится из уравнения состояния $c^2 = \partial p/\partial\rho$. Получилось одно линейное уравнение второго порядка.

Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла в пустоте [3]

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0, \tag{1.7}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0 \tag{1.8}$$

представляют собой систему 8 линейных уравнений первого порядка для 6 неизвестных функций, компонент векторов электрического и магнитного поля $\mathbf{E}, \mathbf{H}$. Чтобы свести их к уравнениям второго порядка, введем потенциалы $\phi(\mathbf{r}, t), \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ так, чтобы

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}. \tag{1.9}$$

В выборе потенциалов имеется некоторый произвол, калибровочная инвариантность [3, §18]. Выберем лоренцеву калибровку

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{A} = 0$$

и подставим поля, выраженные через потенциалы, из (1.9) в (1.7), (1.8). Уравнение (1.7) для $\mathrm{rot}\,\mathbf{E}$ превращается в тождество. Уравнение (1.8) для $\mathrm{rot}\,\mathbf{H}$, если воспользоваться формулой векторного анализа $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = -\triangle\,\mathbf{A} + \nabla\mathrm{div}\,\mathbf{A}$, превращается в систему трех волновых уравнений

$$\Box\mathbf{A} = 0.$$

Точно такое же уравнение получается и для скалярного потенциала ϕ, если продифференцировать по времени калибровочное соотношение. Линейное уравнение с нулем в правой части называется, как и в теории обыкновенных уравнений, *однородным*. Если бы мы учли токи или заряды, они бы появились в правой части уравнения. Уравнение стало бы *неоднородным*.

Уравнение Шредингера

В квантовой механике состояние частицы описывается волновой функцией $\Psi(\mathbf{r},t)$, квадрат модуля которой имеет смысл плотности вероятности найти частицу в окрестности данной точки $\mathbf{r}$ в момент времени t [4]. Волновая функция удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi,$$

где $\hbar$ — постоянная Планка. Оператор Гамильтона $\hat{H}$ для движения частицы в поле $U(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + U(\mathbf{r}), \quad \hat{\mathbf{p}} = -\mathrm{i}\hbar\nabla.$$

Уравнение Шредингера является уравнением в частных производных второго порядка по координатам, но первого порядка по времени. В отличие от волнового уравнения, чтобы выделить частное решение из общего, надо задавать при $t=0$ одно начальное условие, а не два.

Если искать решение в виде стационарных состояний $\Psi(\mathbf{r},t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\psi(\mathbf{r})$, имеющих определенную энергию E, то время можно исключить и получить стационарное уравнение Шредингера

$$\hat{H}\psi = E\psi. \tag{1.10}$$

Требуется найти не только решение ψ, но и такие значения энергии E, при которых эти решения удовлетворяют граничным условиям. Такая постановка называется *спектральной задачей*.

Уравнение теплопроводности

Плотность внутренней энергии сплошной среды c_pT (c_p — теплоемкость, T — температура) проинтегрируем по объему V. Получится полная энергия, которая при отсутствии химических реакций с выделением или поглощением тепла может меняться только за счет потока через поверхность

$$\frac{\partial}{\partial t}\int c_pT\,dV = -\oint \mathbf{Q}\,d\mathbf{S}.$$

Плотность потока тепла, если градиенты температуры малы, дается законом Фурье $\mathbf{Q} = -\varkappa\nabla T$. Преобразуя уравнение к дифференциальному и считая теплоемкость c_p и теплопроводность $\varkappa$ не зависящими ни от температуры, ни от координат или времени, получим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \triangle T, \tag{1.11}$$

Таблица 1.1: Основные методы решения уравнений в частных производных.

№	Метод	Применение
1	Метод характеристик	Уравнения первого порядка
2	Разделение переменных	Симметрия
3	Автомодельность	Симметрия
4	Метод Фурье, интегральные преобразования	Линейное уравнение, постоянные коэффициенты
5	Функции Грина	Линейные неоднородные уравнения
6	Численные методы	Низкая размерность

где $\chi = \varkappa/c_p$ называют коэффициентом температуропроводности.

Так же, как и в предыдущем примере, получилось уравнение второго порядка по пространственным переменным, но первого порядка по времени. Такое уравнение называют уравнением *параболического* типа, в отличие от волнового, которое относится к *гиперболическому* типу. Более точные определения типов линейных уравнений второго порядка мы дадим позже, а здесь приведем пример последнего типа — *эллиптического*. К эллиптическому типу относится уравнение Лапласа $\triangle u = 0$, которое получается из (1.11) в стационарном случае, когда температура не зависит от времени. Уравнение Лапласа для скалярного потенциала получается в стационарном случае и из уравнений Максвелла (электростатика). Уравнения разных типов требуют разной постановки задачи. В данном конспекте мы рассматриваем методы решения уравнений и будем обсуждать постановки задач по мере изучения разных типов уравнений.

1.3 Методы решения

В таблице 1.1 перечислены основные методы решения уравнений в частных производных. Аналитические методы обычно основаны на сведении уравнения в частных производных к обыкновенному или системе обыкновенных. Последние имеют явное решение тоже достаточно редко, но справедливо считаются более простыми. Сама возможность свести к обыкновенным уравнениям встречается очень редко.

Счастливым исключением являются уравнения первого порядка, которые решаются (в том смысле, что сводятся к обыкновенным) методом характеристик. Методом характеристик решаются иногда и линейные уравнения второго порядка гиперболического типа и некоторые системы. Метод характеристик рассмотрен в лекциях 2– 5. Для применимости автомодельных подстановок требуется симметрия уравнения относительно масштабных преобразований независимых переменных, см. лекцию 6. Для того, чтобы в уравнении разделялись переменные, необходима высокая геометрическая симметрия самого уравнения и граничных условий. Разделению переменных посвящена лекция 7.

Для линейных уравнений имеются и другие аналитические методы. Метод Фурье, рассмотренный в лекции 7 и проиллюстрированный примерами в лекциях 8 и 9, как и метод интегральных преобразований, применим только к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами. Фактически тоже требуется симметрия уравнения, в данном методе — трансляционная инвариантность. Иногда уравнение удается также решить, если коэффициенты не постоянны, а линейны по пространственным переменным. Тогда интегральное преобразование понижает порядок уравнения. Линейные неоднородные уравнения часто удается решить с помощью метода функций Грина.

Если симметрии нет, применяются численные методы. Для численного решения не слишком важно линейное уравнение или нелинейное, какого оно порядка, есть ли симметрия. На первый план выходит вопрос о размерности, не слишком существенный для аналитических методов. Если для решения с необходимой точностью на компьютере нам нужно 10^3 точек вдоль каждой оси, то двумерная задача требует 10^6 точек, трехмерная 10^9, а четырехмерную невозможно решить даже на самом современном суперкомпьютере. Численные методы разнообразны и хорошо развиты. Они не рассматриваются в данном курсе, но их знание — необходимый элемент современного образования. Наилучшие результаты в науке и технике получаются при удачном сочетании применения аналитических и численных методов.

После разделения переменных в линейных уравнениях математической физики получаются обыкновенные дифференциальные уравнения того же порядка. Коэффициенты последних зависят от независимой переменной и их решение часто сводится не к элементарным, а к специальным функциям. Лекции 9/8 посвящены обыкновенным уравнениям возникающим при разделении переменных в цилиндрических/сферических координатах. Там же выводятся простейшие свойства цилиндрических и сферических функций: разложение в ряд, рекуррентные соотношения, интегральные представления, соотношения ортогональности. Лекции 10, 11 посвящены теории более общих специальных функций — гипергеометрических, которые в частных случаях сводятся к цилиндрическим, сферическим и многим другим специальным и элементарным функциям. Излагать теорию гипергеометрических рядов можно по разному, мы выбрали подход Фукса на основе аналитической теории обыкновенных уравнений.

Последний раздел — простейшие асимптотические методы состоит из лекций 12, где изложены простейшие методы оценки интегралов (оценка интеграла типа Лапласа и метод стационарной фазы), 13, в которой рассмотрен более сложный и общий метод перевала, и 14, посвященной методу усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений. Лекция 15 — дополнительная, в программу не входит и посвящена квазиклассическому приближению в комплексной плоскости.

Рекомендуемая литература

Главная цель обучения студентов-физиков математическим методам — научить их решать разнообразные задачи. Задачи по уравнениям в частных производных, многие из которых снабжены подробными решениями, можно найти в сборнике [5], содержание которого примерно соответствует настоящим лекциям. Для более детального усвоения материала, в том числе разделов, не включенных в нашу программу, можно дополнительно решать задачи из других сборников, например из [6–11]. Подробное, а не конспективное, изложение теории можно найти во многих книгах, среди которых учебник Годунова [12] выделяется удачным компромиссом между строгостью и доступностью изложения. Наиболее полная теория уравнений в частных производных имеется в классических монографиях [13–16]. Учебники [17–21] предназначены для студентов-математиков, поэтому отличаются строгостью. В качестве введения в предмет можно также рекомендовать книги [22,23], где разобрано много простых примеров. Для более полного изучения можно также обратиться к [24]. Дополнительные ссылки на литературу по отдельным разделам приведены в соответствующих лекциях.