# Лекция 2

# Уравнения первого порядка

## 2.1 Линейные уравнение

### Однородное уравнение

Уравнение вида

$$a(x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{2.1}$$

где $a(x) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — $n$-мерные векторы, является линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка, если компоненты вектора коэффициентов $a$ не зависят от неизвестной функции $u$.

**Определение 2.1.** *Уравнением характеристик* называется система обыкновенных уравнений

$$\dot{x} = a(x), \tag{2.2}$$

где точкой обозначена производная по параметру $\tau$, который мы искусственно вводим.

Система (2.2) содержит $n$ уравнений, поэтому имеет $n$ первых интегралов (функций $x, \tau$, которые сохраняются при изменении $\tau$). В том числе имеется $n-1$ первых интегралов, не зависящих от параметра $\tau$: $F_1(x) = \mathrm{const}, \ldots, F_{n-1}(x) = \mathrm{const}$. Все множество первых интегралов называют *полным интегралом*. Кривые в пространстве $\mathbb{R}^n$, на которых постоянны функции $F_i$, называются *характеристиками*.

Зная первые интегралы $F_i$, можно построить *общее решение* или общий интеграл уравнения (2.1). Для этого надо взять произвольную гладкую функцию $g$ этих первых интегралов

$$u(x) = g(F_1(x), \ldots, F_{n-1}(x)). \tag{2.3}$$

Параметр $\tau$ меняется вдоль характеристики, а решение (2.3) сохраняется. Вывести эту формулу можно, подставляя функцию (2.3) в уравнение (2.1), заменяя

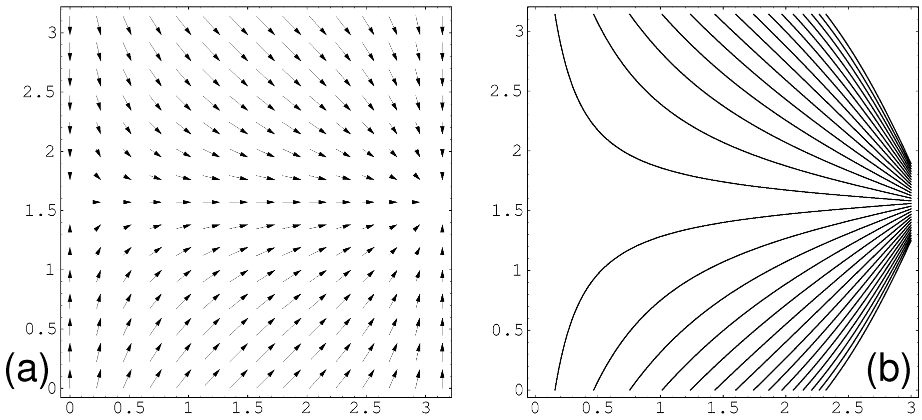



Рис. 2.1: Поле направлений (a) и интегральные кривые (b) для примера 2.1.

$a(x)$ согласно (2.2) и пользуясь постоянством первых интегралов $F_i$:

$$a\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} \dot{x}_i \frac{\partial g}{\partial F_j}\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial F_j}\frac{dF_j}{d\tau} = 0.$$

Теперь, если удается решить систему обыкновенных уравнений, мы сможем решить и уравнение в частных производных.

Можно было бы вместо вывода формулы воспользоваться наглядными геометрическими соображениями, изложенными, например, в книгах Арнольда [25, 26]. Уравнение (2.1) означает, что равна нулю производная функции $u(x)$ вдоль направления вектора $a$. Значит решение уравнения (2.1) постоянно вдоль "силовых линий" этого поля — характеристик. Чтобы решить уравнение (2.1) методом характеристик, надо восстановить интегральные кривые по полю направлений. В каждой точке имеется одно направление вдоль характеристик (координата $\tau$) и $n-1$ направление в ортогональном дополнении $(F_1, \ldots, F_{n-1})$. Уравнение сводится к виду $du/d\tau = 0$, а решение дается формулой (2.3).

Пример 2.1. Вектор $a = (\sin x, \cos y)$ уравнения $\sin x \cdot u_x + \cos y \cdot u_y = 0$ задает векторное поле в плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, показанное на рис. 2.1(a). Уравнения характеристик $\dot{x} = \sin x, \dot{y} = \cos y$ можно проинтегрировать. Однако удобнее сразу найти первый интеграл, не зависящий от параметра, разделив одно уравнение на другое и разделяя переменные: $F(x, y) = \mathrm{tg}\,(x/2)[1 - \mathrm{tg}\,(y/2)]/[1 + \mathrm{tg}\,(y/2)]$. Тогда общее решение дается произвольной функцией $g$ одной переменной $u(x, y) = g(F)$, которая постоянна вдоль характеристик — интегральных кривых рисунка 2.1(b).

## Задача Коши

Чтобы из общего решения выбрать частное, надо добавить к уравнению (2.1) *начальное условие*, которое задается на *начальной гиперповерхности* $S$

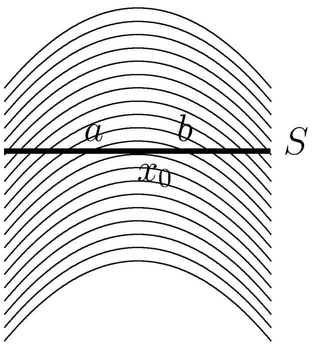
$$u|_S = f(x). \tag{2.4}$$

Гиперповерхность — это многообразие, размерность которого на единицу меньше, чем у всего пространства ($\dim S = n-1$). Мы будем вместо гиперповерхности говорить просто поверхность. Уравнение (2.1) вместе с начальным условием (2.4) составляют задачу Коши.

Если в общее решение (2.3) подставить начальное условие (2.4), получится функциональное уравнение, которое дает частное решение. Очень трудно, а в общем случае и невозможно, сформулировать условие, при котором это функциональное уравнение глобально разрешимо во всем пространстве. Однако если ограничиться локальной задачей: можно ли продолжить решение в малую окрестность некоторой точки $x_0$ начальной гиперповерхности, то можно сформулировать сравнительно простое правило.

**Определение 2.2.** Говорят, что кривая *трансверсальна* поверхности, если она пересекает поверхность под ненулевым углом.

**Теорема 2.1.** *Решение задачи Коши (2.1), (2.4) в окрестности точки $x_0 \in S$ существует и единственно, если проходящая через точку $x_0$ характеристика трансверсальна поверхности $S$.*




За доказательством теоремы мы отсылаем к математической литературе, например, книге [25]. Идея доказательства состоит в том, чтобы рассматривать не одну характеристику, а все семейство характеристик. Пусть характеристика в точке $x_0$ касается начальной поверхности $S$. Тогда соседняя характеристика пересекает $S$ в двух точках $a$ и $b$. Значит возникает конфликт между значением, заданным в точке $b$, и другим значением, которое приносит характеристика из точки $a$. Такой конфликт делает задачу, вообще говоря, неразрешимой.

*Упражнение* 2.1. Решить уравнение примера 2.1 с начальным условием $u(\pi/2, y) = y$. Почему не удается решить задачу Коши $u(0, y) = y$?

## Неоднородное уравнение

Неоднородное уравнение

$$a(x)\frac{\partial u}{\partial x} = b(x) \tag{2.5}$$

отличается от однородного **(2.1)** функцией $b(x)$ в правой части. Уравнение характеристик **(2.2)** дополняется уравнением для функции $u$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x), \\ \dot{u} &= b(x). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Теперь это система $n+1$ обыкновенных уравнений в $n+1$-мерном *расширенном* пространстве. К координатам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ добавилась координата $u$. Если мы решим систему **(2.2),** то решение $x(\tau)$ можно подставить в уравнение **(2.6)** и проинтегрировать вдоль характеристики. Появится еще одна константа интегрирования $u(\tau) = \int b(x(\tau))\,d\tau + \mathrm{const}$. Если эту последнюю константу записать как произвольную функцию первых интегралов $F_i$, а параметр $\tau$ выразить через переменные $x$, получится общее решение уравнения **(2.5)** в виде суммы общего решения **(2.3)** однородного уравнения и частного решения неоднородного

$$u(x) = g(F_1, \ldots, F_{n-1}) + \int_{\tau_0}^{\tau} b(x(\tau'))\,d\tau'.$$

Пример 2.2. Чтобы решить неоднородное уравнение

$$\frac{1}{x}u_x - yu_y = y,$$

выпишем уравнения характеристик $\dot{x} = x^{-1}, \dot{y} = -y, \dot{u} = y$. Решение системы трех уравнений содержит 3 произвольные константы $C, C_1, C_2$ :

$$\frac{x^2}{2} = \tau + C_1, \quad y = C_2 \mathrm{e}^{-\tau}, \quad u = -C_2 \mathrm{e}^{-\tau} + C.$$

Не зависящий от $\tau$ первый интеграл есть $F = y\exp(x^2/2) = \mathrm{const}$, тогда общее решение дается произвольной функциональной связью константы $C$ и интеграла $F$:

$$u(x,y) = -y + g\left(y\mathrm{e}^{x^2/2}\right)$$

*Упражнение* 2.2. Нарисуйте характеристики уравнения из примера 2.2 и решите задачу Коши $u(0,y) = y^2$. Что мешает поставить задачу Коши при $y = 0$?

Решение неоднородного уравнения не равно константе вдоль характеристики, но необходимость трансверсальности характеристики к начальной гиперповерхности для разрешимости задачи Коши остается в силе. Иногда этим требованием пользуются в качестве определения характеристики. Можно называть характеристикой кривую, на которой нельзя поставить задачу Коши. Другими словами, решение, заданное вдоль характеристики нельзя продолжить даже в малую окрестность характеристики. Такое определение, как будет показано ниже, годится не только для уравнений первого порядка, но и в общем случае.

Другое важное и общее свойство характеристики — инвариантность относительно преобразований пространства $\mathbb{R}^n$. После такого преобразования уравнение первого порядка примет вид $a(\partial y/\partial x)u_y = b$, тогда уравнение характеристик будет $\dot{y} = a(\partial y/\partial x)$. С другой стороны можно преобразовать к новым переменным само уравнение характеристики, получится $(\partial x/\partial y)\dot{y} = a$. Уравнения получатся одинаковыми, если преобразование невырожденное, т.е. его якобиан $J = \det(\partial y_i/\partial x_j)$ не обращается в нуль или бесконечность.

## 2.2 Квазилинейные уравнения

*Квазилинейное* уравнение

$$a(x,u)\frac{\partial u}{\partial x} = b(x,u) \tag{2.7}$$

отличается от линейного неоднородного тем, что его коэффициенты могут зависеть от решения. Термин "квазилинейное" означает, что уравнение по виду похоже на линейное, хотя и является нелинейным (линейная комбинация решений не удовлетворяет уравнению).

Уравнение характеристик остается тем же самым

$$\dot{x} = a(x,u), \quad \dot{u} = b(x,u), \tag{2.8}$$

но последнее уравнение теперь нельзя решать отдельно. Надо рассматривать всю систему уравнений в расширенном пространстве совместно. В данном случае имеется $n$ первых интегралов, не зависящих от параметра $\tau$:

$$F_1(x,u) = \text{const}, \dots, F_n(x,u) = \text{const}.$$

Каждый интеграл задает одно условие, а значит при фиксированном значении константы определяет поверхность в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Общее решение уравнения (2.7) дается произвольной функцией $n$ переменных

$$G(F_1(x,u), \dots, F_n(x,u)) = 0.$$

Как правило, решение квазилинейного уравнения получается в неявном виде, т.е. последнее соотношение не удается разрешить относительно $u$.

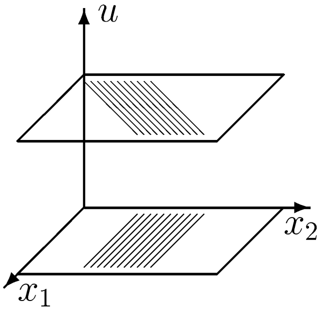
Тем не менее, можно убедиться, что получилось решение. Для этого продифференцируем его по $x_i$ и найдем

$$\frac{\partial G}{\partial F_k}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \frac{\partial F_k}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0,$$

где по повторяющемуся индексу здесь и далее подразумевается суммирование, в данном случае от $k = 1$ до $k = n$. Отсюда мы найдем частные производные $u_{x_i}$ и подставим их в уравнение (2.7), представив числитель в виде разности $\dot{x}_i \partial F_k/\partial x_i = dF_k/d\tau - \dot{u}\partial F_k/\partial u$,

$$a\frac{\partial u}{\partial x} = \dot{x}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\partial G}{\partial F_k} \cdot \frac{\dfrac{dF_k}{d\tau} - b\dfrac{\partial F_k}{\partial u}}{\dfrac{\partial g}{\partial F_k}\dfrac{\partial F_k}{\partial u}} = b,$$

так как полная производная $dF_k/d\tau$ равна нулю по определению первого интеграла.




Уравнение (2.8) является самым общим уравнением характеристик. В простейшем случае линейного однородного уравнения дополнительное уравнение характеристик $\dot{u} = 0$ имеет простое решение $u = \mathrm{const}$ и описывает семейство плоскостей, ортогональных оси $u$ расширенного пространства. В каждой плоскости характеристики — решения уравнений $\dot{x} = a$ выглядят одинаково, поэтому мы рассматривали их только в одной плоскости $u = 0$. Характеристики квазилинейного уравнения могут не быть плоскими кривыми. В частном случае однородного квазилинейного уравнения характеристики плоские, но имеют различный наклон в разных “горизонтальных” плоскостях. Рассмотрим одно важное однородное квазилинейное уравнение.

## Уравнение Хопфа

Квазилинейное уравнение Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (2.9)$$

описывает, например, одномерный газ невзаимодействующих частиц, иными словами, это одномерное уравнение динамики (1.5) газа с нулевым давлением. Его уравнения характеристик

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{x} = u, \quad \dot{u} = 0$$

имеет следующие первые интегралы

$$x - ut = F_1(x,t,u) = \mathrm{const}, \quad u = F_2(x,t,u) = \mathrm{const}.$$

Характеристики представляют собой прямые линии, имеющие в каждой плоскости $u = \mathrm{const}$ разный наклон. Общее решение $G(x - ut, u) = 0$ можно записать в виде, разрешенном относительно $u$: $u = g(x - ut)$.

Рассмотрим задачу Коши $u(x,0) = \operatorname{arcctg} x$. Функция $g$ находится сразу $g(x) = \operatorname{arcctg} x$, откуда

$$u = \operatorname{arcctg}(x - ut). \qquad (2.10)$$

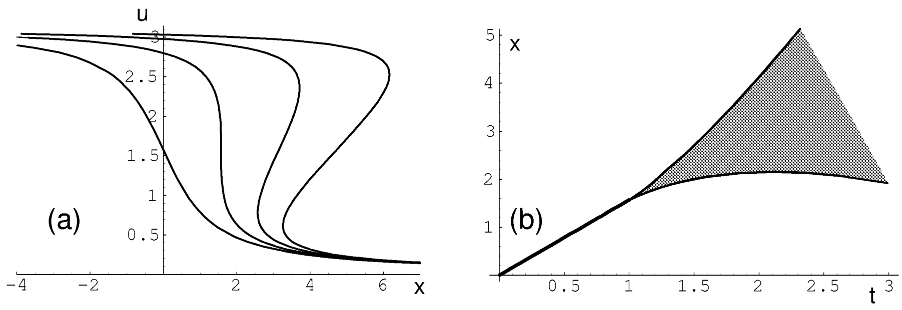



Рис. 2.2: Опрокидывание котангенсоиды (a): слева направо $t = 0, 1, 2, 3$. Расширение области неоднозначности (b).

Из графика решения, приведенного на рис. 2.2, видно, что в какой-то момент времени $t > 0$ производная $u_x$ может обращаться в бесконечность. После этого момента $u$ как функция $x$ перестает быть однозначной. Это явление называется *опрокидыванием* или *градиентной катастрофой*. Производную $u_x$ можно вычислить, дифференцируя по $x$ решение (2.10):

$$u_x = -\frac{1}{1 + \xi^2 - t}, \quad \xi = x - ut. \tag{2.11}$$

Знаменатель впервые обращается в нуль при $t = t^* = 1$, происходит это при $u^* = \pi/2$ в точке $x^* = \pi/2$.

При $t > t^*$ производная обращается в бесконечность в двух точках (см. верхнюю кривую на рис. 2.2a). Между этими точками находится область неоднозначности. Закон расширения области неоднозначности в окрестности точки опрокидывания можно найти, разлагая в ряд решение уравнений $u = \operatorname{arcctg}\xi, 1 + \xi^2 - t = 0$ при $\xi \ll 1$. Получается $|x - \pi t/2| \leqslant (t-1)^{3/2}, t > 1$. Область неоднозначности ограничена полукубической параболой. При $t < t^*$ решение однозначно, а при $t > t^*$ имеется расширяющаяся область, указанная на рис. 2.2b серым цветом.

В физике причина опрокидывание прозрачна. Если начальный профиль $u(x, 0)$ имеет участок с отрицательным наклоном $\partial u(x, 0)/\partial x < 0$, то на этом интервале быстрые частицы (с большими значениями $u$) догоняют более медленные и крутизна фронта увеличивается. В газовой динамике расширение области неоднозначности обычно не встречается, потому что при приближении к моменту опрокидывания уравнения теряют применимость и формируются ударные волны. Подробности можно найти в книге [27].

С геометрической точки зрения в расширенном пространстве $(x, t, u)$ имеется поле направлений $(u, 1, 0)$, которое задается уравнением характеристик. В каждой горизонтальной плоскости векторы имеют свой наклон. Найти решение задачи Коши для уравнения Хопфа означает провести через данные векторы интегральную поверхность, которая при $t = 0$ проходит через заданную кривую $u(x, 0)$. Интегральная поверхность для рассмотренного выше примера с $u(x, 0) =$

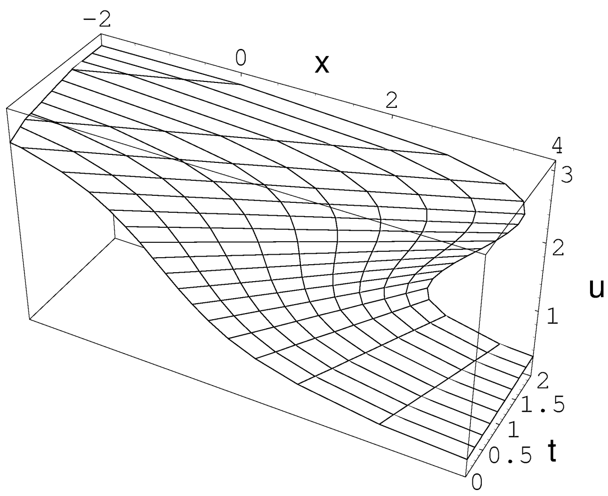



Рис. 2.3: Интегральная поверхность уравнения Хопфа.

$\operatorname{arcctg} x$ изображена на рисунке 2.3. Вертикальная прямая при $t < 1$ пересекает интегральную поверхность в одной точке, а при $t > 1$ может пересекать в трех точках. Вообще говоря, изменение количества корней называется в математике *бифуркацией*. В данном случае точка бифуркации $(x^*, t^*, u^*) = (\pi/2, 1, \pi/2)$, где происходит переход от одного корня к трем, называется *точкой сборки*.

## 2.3 Нелинейные уравнения

**Определение 2.3.** *Нелинейным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$F(x,p,u) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad p = \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right). \tag{2.12}$$

Нелинейное уравнение задает поверхность в $2n+1$-мерном расширенном фазовом пространстве ($n$ координат $x_i$, $n$ импульсов $p_i$ и функция $u$).

Сравнивая с определением 1.1, видим, что нелинейное уравнение — это общее уравнение первого порядка. Квазилинейное уравнение (2.7) представляет собой частный случай нелинейного (2.12) с линейной по $p$ функцией $F = a(x,u)p - b(x,u)$.

Чтобы вывести уравнение характеристик, продифференцируем (2.12) по $x_k$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u}p_k = 0.$$

Мы воспользовались равенством перекрестных производных во втором слагаемом и определением импульсов в третьем и получили систему квазилинейных уравнений **(2.7)**, для каждого из которых уравнение характеристик известно

$$\dot{x}_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial u} p_i, \quad \dot{u} = \frac{\partial F}{\partial p_i} p_i. \tag{2.13}$$

Последнее уравнение получилось из первого, с учетом определения $p_i$, а именно $\dot{u} = u_x \dot{x}$. Уравнения характеристик можно переписать в компактном векторном виде

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{p} = -F_x - pF_u, \quad \dot{u} = pF_p.$$

Общее решение выписывается в виде произвольной связи $2n$ первых интегралов уравнений **(2.13)** $F_1(x,p,u), F_2(x,p,u), \ldots, F_{2n}(x,p,u)$, не зависящих от параметра $\tau$:

$$G(F_1, \ldots, F_{2n}) = 0. \tag{2.14}$$

К равенству **(2.14)** надо добавить $n$ условий $p_i = \partial u / \partial x_i$ и с их помощью исключить $p_i$. Таким образом, решение всегда можно записать, по крайней мере, в неявном параметрическом виде.

## Уравнение Гамильтона—Якоби

Решим одномерное уравнение Гамильтона — Якоби [28] для свободной частицы с начальным условием

$$S_t + \frac{1}{2} S_x^2 = 0. \quad S(x,0) = x^2.$$

В общем случае **(2.12)** называется *уравнением Гамильтона — Якоби*, если $F$ не зависит от $u$. Введем импульсы $p_0 = S_t, p_1 = S_x$. Функция здесь $F = p_0 + p_1^2/2 = 0$, откуда уравнения характеристик

$$\dot{t} = 1, \ \dot{x} = p_1, \ \dot{p_0} = \dot{p_1} = 0, \ \dot{S} = p_0 + p_1^2 \equiv p_1^2/2.$$

Исключая параметр $\tau$, и константу $p_0$ найдем общее решение

$$S - \frac{p^2}{2} t = g(x - pt), \quad p = g'(x - pt); \quad p \equiv p_1.$$

Ответ получился в параметрическом виде, из него еще надо исключить постоянную $p$. Функцию $g = x^2$ найдем из начальных условий, тогда

$$S - \frac{p^2 t}{2} = (x - pt)^2, \quad p = 2(x - pt) \text{ или } p = \frac{2x}{1 + 2t},$$

откуда $S = x^2/(1 + 2t)$.

Теория нелинейных уравнений первого порядка изложена в учебниках по обыкновенным дифференциальным уравнениям, например, [25, 29].