Лекция 3

Системы линейных уравнений

В нашу задачу входит не столько изложение общей теории, сколько иллюстрация основных идей математической физики на простейших примерах. Поэтому системы линейных (или квазилинейных) уравнений первого порядка мы рассмотрим на примере системы на функции всего двух переменных x и t. Особенности многомерного случая мы коротко рассмотрим позже, в лекции 5, в связи с уравнениями второго порядка.

3.1 Характеристики

Определение 3.1. Системой линейных уравнений первого порядка с двумя переменными называется система

$$A\frac{\partial\psi}{\partial t} + B\frac{\partial\psi}{\partial x} = b, \tag{3.1}$$

где A, B — действительные матрицы $m \times m$, причем матрицу A мы считаем невырожденной, а $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m)^\intercal, b = (b_1, \ldots, b_m)^\intercal$ — столбцы неизвестных функций и заданных правых частей, соответственно.[1] Если A, B, b зависят не только от x, t, но и от решения ψ, то система естественно является квазилинейной.

Под характеристикой системы будем понимать, как и в предыдущей лекции, кривую в плоскости (x, t), с которой решение невозможно продолжить. Пусть начальное условие задано на кривой γ, тогда вдоль нее $d\psi = \psi_t dt + \psi_x dx$. Вместе с исходной системой **(3.1)** получилась система линейных алгебраических уравнений на $2m$ неизвестных производных ψ_t, ψ_x. Выпишем ее расширенную матрицу $2m \times (2m+1)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} A & B & b \\ Edt & Edx & d\psi \end{array}\right). \tag{3.2}$$

Вертикальная черта здесь отделяет матрицу системы от столбца правых частей, а E — единичную матрицу.

[1] Значок $^\intercal$ обозначает транспонирование.

Таблица 3.1: Классификация систем уравнений по типам.

Собственные значения	Тип
вещественны и различны	гиперболический
совпадают	параболический
мнимые	эллиптический

Можно ли продолжить решение с кривой γ, хотя бы в окрестность точки (x_0, t_0)? Если записать разложение ψ в ряд Тейлора $\psi(x,t) \approx \psi(x_0,t_0)+\psi_x(x-x_0)+\psi_t(t-t_0)$, мы увидим, что для продолжения решения надо знать по крайней мере первые производные. Когда определитель системы равен нулю, даже первые производные найти нельзя, поэтому решение продолжить не удается. Значит уравнением характеристик служит условие равенства нулю определителя системы (матрица системы выписана в (3.2) слева от черты). Это условие можно упростить

$$\begin{vmatrix} A & B \\ Edt & Edx \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left|A\tfrac{dx}{dt} - B\right| = 0.$$

Мы воспользовались формулой для определителя блочной матрицы:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|\,,$$

где A, B, C, D — квадратные матрицы, причем A и C перестановочны.

Равенство можно еще более упростить, если ввести матрицу $C = A^{-1}B$

$$\left|\lambda E - C\right| = 0, \quad \lambda = \frac{dx}{dt}. \tag{3.3}$$

Получилось характеристическое уравнение, значит наклоны характеристик равны собственным значениям матрицы C. В зависимости от собственных значений системы классифицируются по типам, как показано в таблице 3.1. Заметим, что возможен еще один частный случай, когда собственные числа совпадают, но матрица все же приводится к диагональному виду. Тогда система тоже относится к гиперболическому типу.

На характеристике, где определитель (3.3) обращается в нуль, система уравнений (3.2) разрешима при условии совпадения рангов матрицы системы и расширенной матрицы системы

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A & B \\ Edt & Edx \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\left(\begin{array}{cc|c} A & B & b \\ Edt & Edx & d\psi \end{array}\right). \tag{3.4}$$

Полученная система дифференциальных уравнений называется *соотношениями на характеристиках*. Само название подсказывает, что dx/dt надо подставлять из уравнения характеристик (3.3). Иногда эти соотношения удается проинтегрировать, полученные интегралы называются *инвариантами Римана*.

3.2 Инварианты Римана

Система уравнений гидродинамики (1.4), (1.5) является дозвуковой, когда скорость мала по сравнению с $c = \sqrt{dp/d\rho}$, поэтому в уравнение состояния не входит скорость: $p = p(\rho)$. В одномерной геометрии получится система квазилинейных уравнений на плотность $\rho(x,t)$ и скорость $u(x,t)$

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0,\ u_t + \frac{c^2}{\rho}\rho_x + uu_x = 0. \tag{3.5}$$

Введем вектор-функцию $\psi = (\rho, u)^\intercal$, тогда A — единичная матрица, $B = \left(\begin{smallmatrix} u & \rho \\ c^2/\rho & u \end{smallmatrix}\right)$. Собственные значения последней матрицы равны $\lambda_{1,2} = u \pm c(\rho)$. Поскольку $u \ll c$, получились два семейства характеристик с положительным и отрицательным наклоном.

Чтобы найти соотношение на характеристиках надо вычеркнуть в расширенной матрице один из столбцов, например, третий и найти определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cancel{u} & \rho & 0 \\ 0 & 1 & \cancel{c^2/\rho} & u & 0 \\ dt & 0 & \cancel{dx} & 0 & d\rho \\ 0 & dt & \cancel{0} & dx & du \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho\,dt & d\rho \\ dx - u\,dt & du \end{vmatrix}_{\dot{x}=u\pm c} = 0,$$

откуда $\rho\,du = \pm c\,d\rho$. Мы снова воспользовались формулой для определителя блочной матрицы. Полученное соотношение можно один раз проинтегрировать, тогда для инвариантов Римана получится формула

$$J_\pm = u \pm \int \frac{c(\rho)\,d\rho}{\rho}. \tag{3.6}$$

Можно умножить первое уравнение системы (3.5) на c/ρ и сложить со вторым или вычесть из второго. Получится система уравнений на инварианты Римана

$$\frac{\partial J_+}{\partial t} + (u+c)\frac{\partial J_+}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial J_-}{\partial t} + (u-c)\frac{\partial J_-}{\partial x} = 0.$$

Впечатление о том, что уравнения расцепились, обманчиво. Чтобы полностью перейти к новым переменным, надо перевыразить $u, c(\rho)$ через инварианты $J_\pm$. Тогда станет видно, что, вообще говоря, уравнения можно решить только совместно.

Встречаются задачи, где в из-за граничных условий на бесконечности один из инвариантов не зависит от координаты, тогда в силу уравнений он не зависит и от времени. Приравнивая один из инвариантов константе, мы сведем систему к одному квазилинейному уравнению $u_t + (u+c)u_x = 0$, которое решается. Такое решение называют *простой волной Римана*. Имеется также частный случай политропного газа, уравнение состояния которого степенное $p\rho^{-\gamma} = \mathrm{const}$. При определенных дискретных значениях показателя γ можно решить систему одномерной гидродинамики методом годографа (лекция 4).

3.3 Канонический вид гиперболической системы

Продолжим общую теорию систем уравнений первого порядка, предполагая ниже матрицу C — симметричной и не зависящей от решения. Симметричность матрицы C достаточна, чтобы гарантировать гиперболичность системы

$$\psi_t + C\psi_x = f, \tag{3.7}$$

где $f(x,t)$ — новый столбец правых частей, получившийся из b после умножения системы **(3.1)** слева на матрицу A^{-1}. Приведем C к диагональному виду

$$C = T\Lambda T^{-1}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Перейдем к новой неизвестной вектор-функции $\psi = T\phi$, тогда, умножив уравнение **(3.7)** слева на T^{-1}, мы приведем его к виду

$$\phi_t + \Lambda\phi_x = \tilde{f},$$

называемому *каноническим*. Здесь новая правая часть получается из старой $\tilde{f} = T^{-1}f - T^{-1}T_t\phi - T^{-1}CT_x\phi$ и зависит от решения, но не содержит его первых производных. На дифференциальные части уравнений в каноническом базисе получаются отдельные уравнения, которые зацепляются только через правые части. Может случиться, что уравнения станут однородными, тогда их можно решать по-отдельности.

3.4 Формула Даламбера

Применим общую теорию систем к одномерному однородному волновому уравнению

$$w_{tt} - w_{xx} = 0 \tag{3.8}$$

можно свести к системе, если обозначить $w_t \equiv u, w_x \equiv v$. Тогда первое уравнение получается из волнового, а второе из равенства перекрестных производных

$$u_t - v_x = 0, \quad v_t - u_x = 0.$$

Матрица $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ приводится к диагональному виду матрицей $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$: $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, откуда канонический вид системы будет $\alpha_t - \alpha_x = 0, \quad \beta_t + \beta_x = 0$, где $\alpha = (u+v)/2, \beta = (u-v)/2$. Каноническая система получилась распавшаяся, поэтому можно сразу выписать общие решения каждого уравнения, а затем найти и общее решение волнового уравнения

$$w(x,t) = f(x-t) + g(x+t). \tag{3.9}$$

Решение состоит из двух волн, бегущих во встречных направлениях. Как и положено, наиболее общее решение уравнения второго порядка содержит две произвольные функции. Переменных в уравнении две, поэтому каждая функция получилась от одной переменной.

Рассмотрим задачу Коши для одномерного волнового уравнения **(3.8)**. Задача должна состоять из двух условий, поскольку уравнение имеет второй порядок по времени

$$w(x,0) = q(x), \quad w_t(x,0) = h(x). \tag{3.10}$$

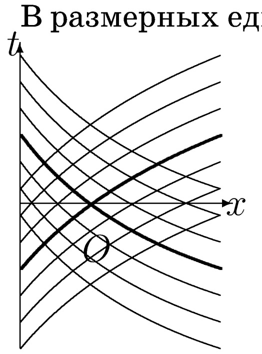
Подставляя начальное условие в общее решение **(3.9)**, получим функциональные уравнения на f, g

$$f(x) + g(x) = q(x), \quad -f'(x) + g'(x) = h(x).$$

Если первое уравнение продифференцировать, система функциональных уравнений решается $g' = \frac{1}{2}(q' + h), f' = \frac{1}{2}(q' - h)$. Отсюда получится формула для решения одномерной задачи Коши — ***формула Даламбера***

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[q(x-t) + q(x+t)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(x')\,dx'. \tag{3.11}$$

В размерных единицах интегрирование происходит от $x - ct$ до $x + ct$.



В общем случае характеристики не прямые, а кривые. Если выбрать какую-нибудь точку O, проходящие через нее характеристики ограничивают на плоскости две области. При $t > 0$ характеристики ограничивают *область влияния* точки O, т.е. те точки, в которых сказываются условия, заданные в точке O. При $t < 0$ характеристики ограничивают *область зависимости*, т.е. множество точек, от которых зависит решение в точке O.

3.5 Неоднородное волновое уравнение

Неоднородное одномерное волновое уравнение с начальными условиями

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} = p(x,t), \quad \psi(x,0) = q(x),\ \psi_t(x,0) = h(x) \tag{3.12}$$

можно свести к уже рассмотренным задачам в два шага. Сначала разобьем неоднородную задачу на две задачи Коши, которые называются полуоднородными

$$w_{tt} - w_{xx} = 0, \qquad w(x,0) = q(x),\ w_t(x,0) = h(x) \tag{3.13}$$

$$v_{tt} - v_{xx} = p(x,t), \qquad v(x,0) = 0,\ v_t(x,0) = 0. \tag{3.14}$$

Одна из задач не имеет правой части уравнения, а во второй использованы нулевые начальные условия. Сумма решений задач **(3.13)**, **(3.14)** $\psi = w(x,t) + v(x,t)$ в силу линейности удовлетворяет уравнению **(3.12)**.

Задачу **(3.13)** мы уже решили, когда выводили формулу Даламбера **(3.11)**. На втором шаге остается решить задачу **(3.14)**, но мы вместо нее рассмотрим вспомогательную задачу

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad u(x,t,\tau)|_{t=\tau} = 0, \; u_t(x,t,\tau)|_{t=\tau} = p(x,\tau). \tag{3.15}$$

Здесь τ — параметр, так что мы рассматриваем целое однопараметрическое семейство вспомогательных задач, начальные условия которых ставятся при $t = \tau$. Вспомогательную задачу можно решить с помощью формулы Даламбера **(3.11)**, если заметить, что решение уравнения с постоянными коэффициентами может зависеть только от разности $t - \tau$:

$$u(x,t,\tau) = \frac{1}{2} \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} p(x',\tau)\, dx'.$$

Теперь покажем, что интеграл вспомогательной функции u по параметру τ

$$v(x,t) = \int\limits_0^t u(x,t,\tau)\, d\tau$$

дает решение задачи **(3.14)**. Для этого дифференцируя, найдем $v_t = u(x,t,\tau)|_{\tau=t} + \int_0^t u_t(x,t,\tau)\, d\tau$. Первое слагаемое обращается в нуль в силу первого начального условия **(3.15)**. Можно продифференцировать еще раз $v_{tt} = u_t(x,t,\tau)|_{\tau=t} + \int_0^t u_{tt}\, d\tau$. Первое слагаемое обращается в $p(x,t)$ в силу второго начального условия **(3.15)**. Остается дифференцирование по x как по параметру. Применяя одномерный оператор Даламбера, получим

$$\Box v \equiv v_{tt} - v_{xx} = \int\limits_0^t \Box u(x,t,\tau)\, d\tau = p(x,t).$$

Утверждение доказано, теперь решение исходной неоднородной задачи **(3.12)** выписывается явно

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2}\left[q(x-t) + q(x+t)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(x',t)\, dx' + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} p(x',\tau)\, dx'.$$