Лекция 4

Метод годографа

4.1 Преобразование годографа

Система квазилинейных уравнений одномерной газовой динамики (3.5) сводится к системе линейных уравнений с помощью метода, хорошо известного из теории обыкновенных дифференциальных уравнений: надо поменять местами неизвестные функции и независимые переменные. Чтобы перейти от переменных (t, x) к переменным (ρ, u), продифференцируем ρ и u по новым переменным, считая их функциями от (x, t)

$$\frac{\partial \rho}{\partial \rho} = 1 = \rho_t \frac{\partial t}{\partial \rho} + \rho_x \frac{\partial x}{\partial \rho}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0 = u_t \frac{\partial t}{\partial \rho} + u_x \frac{\partial x}{\partial \rho};$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = 0 = \rho_t \frac{\partial t}{\partial u} + \rho_x \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial u}{\partial u} = 1 = u_t \frac{\partial t}{\partial u} + v_x \frac{\partial x}{\partial u}.$$

На частные производные по t, x мы получили две системы линейных алгебраических уравнений с одинаковым определителем — якобианом преобразования годографа

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial (t, x)}{\partial (\rho, u)}.$$

Если $J \neq 0, \infty$, частные производные находятся

$$\rho_t = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \rho_x = -\frac{1}{J} \frac{\partial t}{\partial u}, \quad u_t = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \rho}, \quad u_x = \frac{1}{J} \frac{\partial t}{\partial \rho}.$$

Подставляя эти выражения в систему, видим, что якобиан сокращается и получается система линейных уравнений

$$\frac{\partial x}{\partial u} - u \frac{\partial t}{\partial u} + \rho \frac{\partial t}{\partial \rho} = 0, \quad -\frac{\partial x}{\partial \rho} - \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial t}{\partial u} + u \frac{\partial t}{\partial \rho} = 0. \tag{4.1}$$

Преобразование годографа закончилось удачно, потому что в исходной системе коэффициенты не зависели от переменных t, x. Теперь от системы мы перейдем к одному уравнению второго порядка. Для этого нам понадобится ввести новый потенциал.

4.2 Потенциал χ

Сначала введем потенциал скорости ϕ, чтобы скорость была его градиентом $u = \phi_x$. Введем еще и энтальпию w так, чтобы $dw = c^2(\rho)\,d\rho/\rho$. Тогда уравнение Эйлера удастся один раз проинтегрировать и получится

$$\phi_t + \frac{\phi_x^2}{2} + w = 0. \qquad \textbf{(4.2)}$$

Константа интегрирования определяет начало отсчета энтальпии, поэтому несущественна. Мы полагаем ее для простоты равной нулю. Отсюда получается дифференциал потенциала скорости

$$d\phi \equiv \phi_t\,dt + \phi_x\,dx = -\left(\frac{u^2}{2} + w\right)dt + u\,dx.$$

Потенциал ϕ зависит от старых переменных t, x, поэтому нам удобнее перейти от него к новому потенциалу χ от переменных ρ, u. Удобнее также вместо ρ использовать функцию $w(\rho)$. Переход к новым переменным в потенциале осуществляется с помощью преобразования Лежандра, как это делается в термодинамике [30]:

$$\chi(w, u) = \phi + \left(\frac{u^2}{2} + w\right)t - ux, \quad d\chi = t\,dw - (x - ut)\,d,$$

откуда

$$t = \frac{\partial\chi}{\partial w}, \quad x - ut = -\frac{\partial\chi}{\partial u}.$$

Подставляя эти выражение в уравнения (4.1) и переходя к дифференцированию по w ($\partial/\partial\rho = (c^2/\rho)\partial/\partial w$) убедимся, что уравнение Эйлера станет тождеством. Мы для этого выбрали потенциал, сразу удовлетворяющий уравнению (4.2). Уравнение непрерывности перейдет в линейное уравнение второго порядка

$$c^2\frac{\partial^2\chi}{\partial w^2} - \frac{\partial^2\chi}{\partial u^2} + \frac{\partial\chi}{\partial w} = 0. \qquad \textbf{(4.3)}$$

Полученное уравнение отличается от одномерного волнового только последним слагаемым с первой производной и зависимостью скорости c от плотности. Но и этих небольших различий хватает, чтобы оно не решалось в общем виде. Рассмотрим частный случай политропного газа, где иногда удается выписать решение.

4.3 Политропный газ

Для важного случая политропного газа, где уравнение состояния степенное ($p\rho^{-\gamma} = \mathrm{const}$), энтальпия и скорость звука легко находится

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \gamma\frac{p}{\rho}, \quad w = \int\frac{c^2\,d\rho}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} \Rightarrow c^2 = (\gamma - 1)w.$$

Оказывается, при дискретных значениях показателя

$$\gamma = \frac{2n+3}{2n+1} = 3, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \ldots,$$

где n — целое положительное число, можно выписать формулу для решения. При $n = 1, 2$ реализуются важные для физики случаи одноатомного и двухатомного молекулярного газа. Мы выведем эти формулы по индукции, сначала для нефизического случая $n = 0$, а затем выполнив переход $n \longrightarrow n+1$.

При $n = 0$ уравнение **(4.3)** записывается как

$$2w\frac{\partial^2\chi_0}{\partial w^2} - \frac{\partial^2\chi_0}{\partial u^2} + \frac{\partial\chi_0}{\partial w} = 0,$$

где индекс буквы χ обозначает n. Замена переменной $\xi = \sqrt{2w}$ сводит уравнение к одномерному волновому

$$\frac{\partial^2\chi_0}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2\chi_0}{\partial u^2} = 0,$$

общее решение **(3.9)** которого известно. Отсюда

$$\chi_0(w, u) = f(\sqrt{2w} - u) + g(\sqrt{2w} + u).$$

Переход к переменной ξ в данном уравнении — частный случай приведения линейного уравнения второго порядка к каноническому виду, которое будет рассмотрено в лекции 5.

Уравнение для χ_n политропного газа

$$\frac{2w}{2n+1}\frac{\partial^2\chi_n}{\partial w^2} - \frac{\partial^2\chi_n}{\partial u^2} + \frac{\partial\chi_n}{\partial w} = 0$$

мы продифференцируем по w, приведем подобные и умножим на $(2n+1)/(2n+3)$:

$$\frac{2w}{2n+3}\frac{\partial^3\chi_n}{\partial w^3} - \frac{2n+1}{2n+3}\frac{\partial^3\chi_n}{\partial w\partial u^2} + \frac{\partial^2\chi_n}{\partial w^2} = 0.$$

Нетрудно убедиться, что для первой производной потенциала $\partial\chi_n/\partial w$ почти получилось $(n+1)$-е уравнение. Чтобы убрать лишний множитель во втором слагаемом и тем самым завершить второй шаг индукции, изменим масштаб переменной $u \longrightarrow u' = u\sqrt{(2n+3)/(2n+1)}$. В итоге получаем рекуррентную формулу

$$\chi_{n+1}\left(\sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}}u, w\right) = \frac{\partial}{\partial w}\chi_n(u, w).$$

По известному χ_0 мы теперь можем построить решение для любых n.