Лекция 5

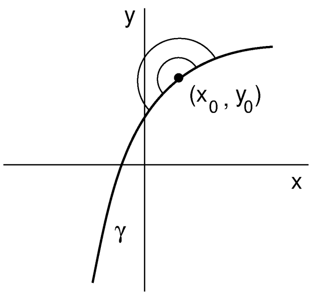
Канонический вид уравнений 2-го порядка

5.1 Случай двух переменных

Когда неизвестная функция $u = u(x, y)$ зависит от $n = 2$ переменных, линейное уравнение второго порядка записывается в виде

$$\hat{\mathcal{L}}u = f, \quad \hat{\mathcal{L}}u \equiv a\,u_{xx} + 2b\,u_{xy} + c\,u_{yy} \quad f = Au_x + Bu_y + Cu + f_0, \tag{5.1}$$

где a, b, c, A, B, C, D, f_0 заданные функции x, y, $\hat{\mathcal{L}}u$ — слагаемые, содержащие вторые производные, которые мы записываем в левой части уравнения и назовем *главной дифференциальной частью*. Главная дифференциальная часть определяет тип уравнения.



Будем действовать по той же схеме, что и в теории систем уравнений, т.е. строить разложение решения в окрестности точки (x_0, y_0), лежащей на начальной кривой γ

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(y - y_0)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y - y_0)^2 + \ldots.$$

Вообще говоря, первые производные заданы начальными условиями, а вторые можно найти из уравнения и продолжить решение в окрестность начальной точки. Ту выделенную начальную кривую, с которой решение продолжить не удается, назовем характеристикой уравнения второго порядка.

Чтобы найти такие кривые, перейдем к новым координатам на плоскости $\alpha = \alpha(x, y), \beta = \beta(x, y)$, считая прямое и обратное преобразования неособыми

$$J = \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(x, y)} \neq 0, \infty.$$

Линии уровня функций $\alpha(x, y), \beta(x, y)$ станут новыми координатными линиями. а операторы выразятся через новые переменные

$$\partial_x = \alpha_x \partial_\alpha + \beta_x \partial_\beta, \quad \partial_y = \alpha_y \partial_\alpha + \beta_y \partial_\beta,$$

где операторы дифференцирования для краткости обозначены

$$\partial_\xi \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Оператор главной дифференциальной части запишется как

$$\hat{\mathcal{L}} = a\ (\alpha_x \partial_\alpha + \beta_x \partial_\beta)^2 + 2b\ (\alpha_x \partial_\alpha + \beta_x \partial_\beta)(\alpha_y \partial_\alpha + \beta_y \partial_\beta) + c\ (\alpha_y \partial_\alpha + \beta_y \partial_\beta)^2\ ,$$

где квадрат оператора означает, что оператор надо применить к стоящей справа от него функции дважды. Если раскрыть все скобки, главная дифференциальная часть в новых координатах будет выглядеть как

$$\tilde{\hat{\mathcal{L}}} = \tilde{a}\, \partial_\alpha^2 + 2\tilde{b}\, \partial_\alpha \partial_\beta + \tilde{c}\, \partial_\beta^2$$

с новыми преобразованными функциями $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$, которые выражаются через старые

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= a\, \alpha_x^2 + 2b\, \alpha_x \alpha_y + c\, \alpha_y^2, \\ \tilde{b} &= a\, \alpha_x \beta_x + b\, (\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) + c\, \alpha_y \beta_y, \\ \tilde{c} &= a\, \beta_x^2 + 2b\, \beta_x \beta_y + c\, \beta_y^2, \end{aligned} \tag{5.2}$$

Если $\tilde{a} = 0$, то мы не сможем найти из уравнения вторую производную $u_{\alpha\alpha}$, а следовательно и продолжить решение в окрестность начальной точки. Поэтому уравнение характеристики будет

$$\tilde{a} = a\, \alpha_x^2 + 2b\, \alpha_x \alpha_y + c\, \alpha_y^2 = 0. \tag{5.3}$$

Чтобы характеристики существовали, необходима положительность дискиминанта квадратного уравнения $D = b^2 - ac > 0$. Рассмотрим последовательно три случая $D > 0, D = 0, D < 0$ и постараемся каждый раз привести уравнения к наиболее простому виду — каноническому.

1°. $D > 0$ — ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ТИП

Квадратное уравнение (5.3) имеет два корня

$$\alpha_x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a}\, \alpha_y. \tag{5.4}$$

Имеется два семейства характеристик, соответствующих знакам $\pm$, поэтому можно одновременно обратить в нуль два коэффициента $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$. Если в качестве канонической переменной ξ выбрать решение уравнения (5.4) со знаком плюс, а в качестве η — решение со знаком минус. Тогда легко найти оставшийся коэффициент $\tilde{b} = -2D\alpha_y\beta_y/a$. Уравнение сведется к виду $2\tilde{b}\, u_{\xi\eta} = \tilde{f}$. Здесь в $\tilde{f}$ вошли все члены, не содержащие вторых производных. Остается разделить уравнение на $2\tilde{b}$, тогда получится *канонический вид уравнения гиперболического типа*

$$u_{\xi\eta} = \tilde{\tilde{f}}.$$

Здесь $\tilde{\tilde{f}}$ — преобразованная правая часть, куда входят и первые производные. Иногда для гиперболических уравнений пользуются вторым каноническим видом, который получается из первого заменой $\xi = \frac{1}{2}(\phi + \psi), \eta = \frac{1}{2}(\phi - \psi)$,

$$u_{\phi\phi} - u_{\psi\psi} = \tilde{\tilde{f}}.$$

В частности, одномерное волновое уравнение **(3.12)** имеет как раз такой вид, поэтому относится к гиперболическому типу.

2°. $D = 0$ — ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ ТИП

В этом промежуточном случае квадратное уравнение **(5.3)** имеет одно решение $\alpha_x = -b\alpha_y/a$. Возьмем $\alpha = \xi$ в качестве первой канонической переменной, а η выберем произвольно. В результате обратятся в нуль коэффициенты при $u_{\xi\xi}$ и при перекрестной производной $u_{\xi\eta}$, получится

$$u_{\eta\eta} = \tilde{\tilde{f}},$$

канонический вид уравнения параболического типа, в который не вошла вторая производная по ξ. Примером может служить одномерное уравнение теплопроводности или диффузии **(1.11)**:

$$u_t = u_{xx}. \qquad \textbf{(5.5)}$$

В уравнение не входит вторая производная по времени, поэтому его относят к параболическим.

2°. $D < 0$ — ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ТИП

Формально можно выписать один из комплексных корней квадратного уравнения **(5.3)**

$$\alpha_x = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-D}}{a}\,\alpha_y, \quad \alpha = \xi + \mathrm{i}\eta,$$

а в качестве канонических переменных выбрать вещественную и мнимую часть функции $\alpha(x, y)$. Разделяя вещественную и мнимую часть получим

$$\tilde{a} = a\,(\xi_x + \mathrm{i}\eta_x)^2 + 2b\,(\xi_x + \mathrm{i}\eta_x)(\xi_y + \mathrm{i}\eta_y) + c\,(\xi_y + \mathrm{i}\eta_y)^2 =$$
$$= a\,(\xi_x^2 - \eta_x^2) + 2b\,(\xi_x\xi_y - \eta_x\eta_y) + c\,(\xi_y^2 - \eta_y^2) + 2\mathrm{i}\,[a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y] = 0.$$

Как видно из уравнений **(5.2)**, получившаяся мнимая часть — это коэффициент $\tilde{\tilde{b}}$, который входит в главную дифференциальную часть при переходе к координатам ξ, η, а вещественная часть — это разность $\tilde{\tilde{a}} - \tilde{\tilde{c}}$. Равенство нулю мнимой части обеспечивает $\tilde{\tilde{b}} = 0$, а вещественной дает $\tilde{\tilde{a}} = \tilde{\tilde{c}}$. Поэтому после деления на $\tilde{\tilde{a}}$ получается

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \tilde{\tilde{f}},$$

канонический вид уравнений эллиптического типа. Примером эллиптического уравнения служит двумерное уравнение Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{5.6}$$

Упражнение 5.1. Покажите, что если уравнение второго порядка (5.1) свести к системе уравнений первого порядка, то классификация по типам сохранится.

5.2 Случай многих переменных

При $n > 2$ линейное уравнение второго порядка можно записать в виде

$$a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \tilde{f}(x) = b_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)u + f(x),$$

где по индексам i, j, k подразумевается суммирование от 1 до n, а в левой части уравнения оставлена только главная дифференциальная часть. Для классификации правая часть не важна, поэтому можно заменить уравнение на однородное

$$a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Гладкая невырожденная замена переменных

$$y = y(x), \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_k}$$

приводит главную часть к аналогичному виду

$$\tilde{a}_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} = \tilde{\tilde{f}}, \quad \tilde{a}_{kl} = a_{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j},$$

где в $\tilde{\tilde{f}}$ входят первые производные. Значит матрица коэффициентов главной дифференциальной части преобразуется в каждой точке как квадратичная форма $Q = a_{ij}p_i p_j$.

Теперь задача классификации систем свелась к классификации квадратичных форм. Последние, как известно [31], элементарными преобразованиями сводятся к следующему каноническому виду

$$Q = \sum_{k=1}^{p} q_k^2 - \sum_{k=p+1}^{m} q_k^2,$$

где $m \leqslant n$ — ранг квадратичной формы, т.е. число ненулевых собственных значений матрицы a_{ij}, а $p \leqslant m$ — индекс, т.е. количество ее положительных значений. Отсюда получается классификация уравнений по типам:

1°. $p = n$ (все собственные значения отличны от нуля и одного знака) — *эллиптический тип*.

2°. $m < n$ (имеются нулевые собственные числа) — *параболический тип*.

3°. $m = n, p < n$ (матрица невырождена, но имеются собственные значения того и другого знака)— *гиперболический тип*.

Замечание 5.1. Преобразование многомерных систем к каноническому виду неоднозначно.

Пример 5.1. Трехмерное уравнение Лапласа

$$\triangle u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

инвариантно относительно ортогональных преобразований координат (вращений трехмерного пространства). Действительно, если за z выбрать ось вращения, то

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \Rightarrow$$
$$\partial_x = \cos\varphi\,\partial_{x'} - \sin\varphi\,\partial_{y'}, \quad \partial_y = \sin\varphi\,\partial_{x'} + \cos\varphi\,\partial_{y'} \Rightarrow \partial_x^2 + \partial_y^2 = \partial_{x'}^2 + \partial_{y'}^2.$$

Мы показали, что оператор Лапласа инвариантен относительно вращений.

Пример 5.2. Трехмерное[1] волновое уравнение ($c = 1$)

$$\Box\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0$$

инвариантно относительно преобразований Лоренца

$$t' = t\,\mathrm{ch}\,\beta + x\,\mathrm{sh}\,\beta, \quad x' = t\,\mathrm{sh}\,\beta + x\,\mathrm{ch}\,\beta \Rightarrow$$
$$\partial_t = \mathrm{ch}\,\beta\,\partial_{t'} + \mathrm{sh}\,\beta\,\partial_{x'}, \quad \partial_x = \mathrm{sh}\,\beta\,\partial_{t'} + \mathrm{ch}\,\beta\,\partial_{x'} \Rightarrow \partial_t^2 - \partial_x^2 = \partial_{t'}^2 - \partial_{x'}^2$$

Замечание 5.2. Определение типа уравнения и канонического вида относится к точке, поэтому все пространство может делиться на области эллиптичности и гиперболичности. На границах областей уравнение будет параболично. Например, уравнение $xu_{yy} - u_{xx} = 0$ гиперболично в правой полуплоскости и эллиптично в левой.

Замечание 5.3. Характеристики многомерного гиперболического уравнения — не кривые, а поверхности.

[1] В физике при определении размерности уравнения в частных производных обычно учитываются только пространственные переменные. С математической точки зрения данное уравнение — четырехмерное.

Подробнее проделаем вычисления для двумерного волнового уравнения

$$\hat{L}u = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$$

при переходе к новым переменным $\alpha = \alpha(t,x,y), \beta = \beta(t,x,y), \gamma = \gamma(t,x,y)$ получим следующие операторы в новых переменных

$$\partial_t = \alpha_t\partial_\alpha + \beta_t\partial_\beta + \gamma_t\partial_\gamma, \quad \partial_x = \alpha_x\partial_\alpha + \beta_x\partial_\beta + \gamma_x\partial_\gamma, \quad \partial_y = \alpha_y\partial_\alpha + \beta_y\partial_\beta + \gamma_y\partial_\gamma,$$

Подставляя последние в оператор $\hat{L}$ и приводя подобные при производной ∂_α^2, выпишем уравнение характеристики

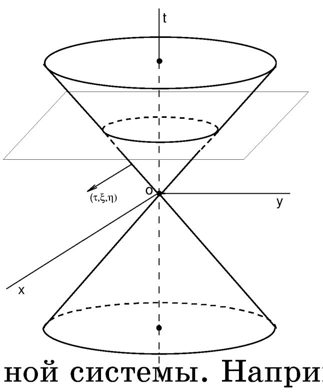
$$\tilde{a} = \alpha_t^2 - \alpha_x^2 - \alpha_y^2 = 0.$$

Получилось уравнение первого порядка, Гамильтона — Якоби, которое в свою очередь можно решить методом характеристик и получится поверхность $\alpha(t,x,y) = \mathrm{const}$.

Для данного уравнения можно также предложить геометрическое решение. Вектор градиента $(\tau,\xi,\eta) = (\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z)$ ортогонален к поверхности и удовлетворяет уравнению конуса

$$\tau^2 - \xi^2 - \eta^2 = 0.$$

Значит и характеристическая поверхность — конус. Конус ограничивает верхней полостью область влияния вершины. Нижняя полость окружает область зависимости.



Сечение светового конуса плоскостью $t = \mathrm{const}$ пересекает характеристику, поверхность конуса, по окружности, которая является волновым фронтом. Проекция нормали на ту же плоскость — луч, указывающий направление распространения возмущения. В любом вертикальном сечении плоскостью, проходящей через ось t, характеристики — пара прямых, как и в случае одной пространственной переменной.

Замечание 5.4. В нелинейной системе вдоль характеристик распространяется малое возмущение линеаризованной системы. Например, в линеаризованной системе уравнений гидродинамики — уравнении акустики **(1.6)** — можно представить возмущение плотности в форме $\rho_1 = \exp(\mathrm{i}S)$, где S — медленная фаза, получится

$$\frac{1}{c^2}\left(-S_t^2 + \mathrm{i}S_{tt}\right) - \mathrm{i} \triangle S - (\nabla S)^2 = 0.$$

Пренебрегая вторыми производными, найдем уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - (\nabla S)^2 = 0.$$

Получилось уравнение характеристик из примера волнового уравнения, значит характеристики в многомерном случае — это поверхности постоянной фазы (эйконала).