Лекция 6

Автомодельность и бегущие волны

6.1 Понятие автомодельности

Определение 6.1. *Автомодельность* — это симметрия задачи, позволяющая скомпенсировать масштабные преобразования независимых переменных соответствующим растяжением решения.

При $n = 2$ автомодельность означает выбор нового масштаба координаты $l(t)$ и решения $u(t)$ таких, что в новых переменных решение является функцией одной переменной ξ

$$u(x,t) = A(t)f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{l(t)}. \tag{6.1}$$

Когда такое преобразование удается найти, задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Иногда преобразование проще всего найти с помощью анализа размерности физических величин, входящих в уравнение. Часто удобнее прямо анализировать преобразования растяжения неизвестных функций и независимых переменных и искать, какую группу преобразований допускает уравнение, т.е. какие растяжения оставляют уравнения неизменными. Важным частным случаем является решение типа *бегущей волны* $u(x,t) = A(t)g(x - Vt)$, где g — функция одной переменной. В данной лекции мы рассмотрим четыре примера автомодельных решений. Подробности теории, особенно хорошо развитой в механике сплошных сред, физике плазмы и астрофизике, см. в литературе, посвященной методам размерности и подобия [32, 33].

6.2 Примеры

Линейное уравнение теплопроводности

Одномерное уравнение теплопроводности с точечным начальным условием запишем сразу в безразмерном виде

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x,0) = \delta(x).$$

Анализ размерностей выполним, исследуя преобразование растяжения

$$t \longrightarrow \mu t, \quad x \longrightarrow \lambda x, \quad u \longrightarrow \nu u. \tag{6.2}$$

Чтобы уравнение было инвариантным относительно такого преобразования, необходимо выполнение соотношения $\mu = \lambda^2$. Начальное условие сохранит свой вид, когда $\nu = \lambda^{-1}$ (размерность δ-функции равна обратной размерности ее аргумента). Выразим все через μ: $\lambda = \mu^{1/2}, \nu = \mu^{-1/2}$, отсюда найдем автомодельную подстановку (6.1)

$$u(x,t) = t^{-1/2} f(\xi), \quad \xi = xt^{-1/2}.$$

Если теперь в таком виде подставить решение в уравнение теплопроводности, мы получим обыкновенное уравнение для функции $f(\xi)$

$$f'' + \frac{1}{2}\xi f' + \frac{1}{2} f = 0. \tag{6.3}$$

При $t \to +0, x \neq 0$ решение должно исчезать, поэтому функция f должна обращаться в нуль при $\xi \to \infty$ вместе со своей производной. Второе условие следует из нормировки δ-функции

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, d\xi.$$

Уравнение (6.3) можно один раз проинтегрировать. Получится $f' + \frac{1}{2}\xi f = 0$, где постоянную интегрирования мы выбрали равной нулю в силу первого условия. Линейное однородное обыкновенное уравнение первого порядка всегда решается: $\ln f = -\xi^2/4 + \mathrm{const}$, а константа находится из второго условия. Автомодельное решение

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

описывает диффузионное расплывание и изображено на рисунке 6.1. Характерная ширина решения растет как $l(t) \sim t^{1/2}$, максимальное значение уменьшается как $A(t) \sim t^{-1/2}$, а площадь под графиком сохраняется.

Замечание 6.1. Начальное условие в рассмотренном и следующем примере задано в виде дельта-функции. Если задать ненулевое начальное условие в области конечной ширины, например, $u(x,0) = Q\exp\left(-x^2/a^2\right)$, в задаче появится второй масштаб a, и автомодельное решение уже перестанет быть точным решением задачи Коши, но останется верным асимптотически на больших временах, когда $l(t) \gg a$, и конечностью a в сравнении с характерной шириной решения можно пренебречь. Вместо граничного условия на бесконечности также может встретиться требование обращения решения в нуль на концах некоторого конечного интервала: $u(\pm L, t) = 0$. В задаче тоже появится второй масштаб, поэтому автомодельное решение перестанет удовлетворять граничным условиям. Однако автомодельное решение справедливо на малых временах до тех пор, пока $l(t) \ll L$.

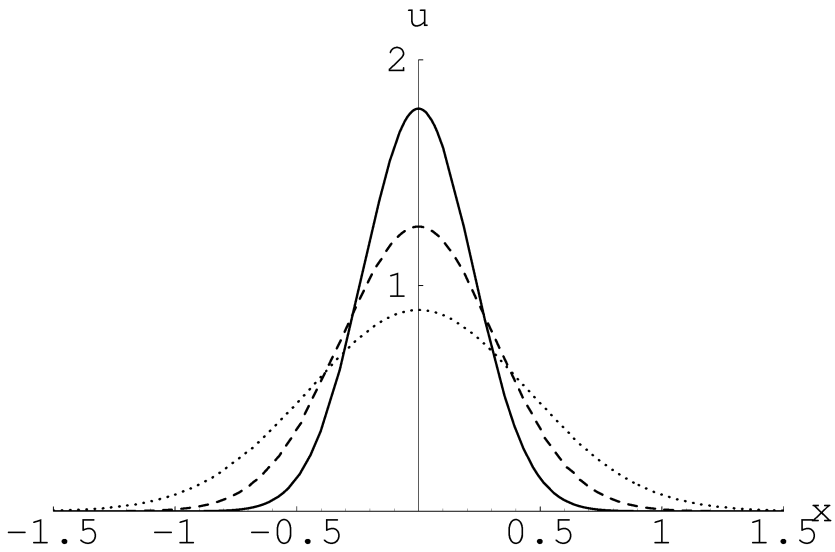

Рис. 6.1: Автомодельное решение линейного уравнения теплопроводности: сплошная линия — $t = 0.025$, пунктир — $t = 0.05$, точки — $t = 0.1$.

Таким образом, в задачах, где характерные масштабы начальных и граничных условий существенно различаются ($a \ll L$), автомодельное решение представляет собой *промежуточную асимптотику* при $a \ll l(t) \ll L$.

Нелинейное уравнение теплопроводности

Нелинейное уравнение теплопроводности, в котором коэффициент температуропроводности зависит от температуры, попытаемся решить для простейшей линейной зависимости $\chi \propto u$ с точечным начальным условием

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad u(x,0) = \delta(x).$$

Растяжение переменных (6.2) оставляет уравнение инвариантным, когда $\lambda = \mu^{1/3}$, а начальное условие сохраняет вид при $\nu = \mu^{-1/3}$. Автомодельная подстановка

$$u(x,t) = t^{-1/3} f(xt^{-1/3})$$

сводит задачу к обыкновенному уравнению

$$(ff')' + \frac{1}{3}\xi f' + \frac{1}{3}f = 0.$$

Так же, как и в предыдущем примере, уравнение можно один раз проинтегрировать и выбрать нулевую константу: $ff' + \frac{1}{3}\xi f = 0$. Имеется два решения $f = 0$,

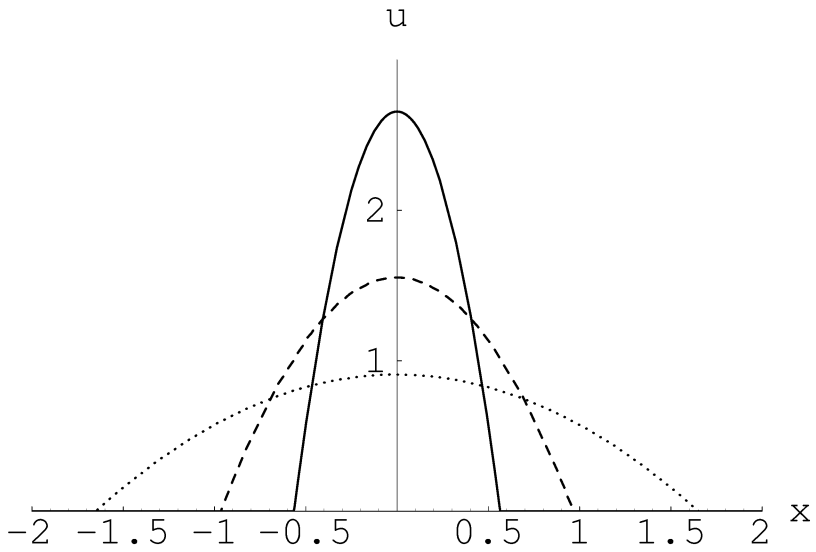

Рис. 6.2: Автомодельное решение нелинейного уравнения теплопроводности: сплошная линия — $t = 0.02$, пунктир — $t = 0.1$, точки — $t = 0.5$.

которое должно быть справедливо при больших по абсолютной величине ξ, и $f = C - \xi^2/6$. Решение склеивается из двух

$$f(\xi) = \begin{cases} C - \dfrac{\xi^2}{6}, & \xi^2 \leqslant 6C, \\ 0, & \xi^2 > 6C. \end{cases}$$

Константу C можно найти из нормировки $C = 6^{1/3}/4$.

На рисунке **6.2** показано решение в три разных момента времени. В отличие от рисунка **6.1**, решение имеет резкий край — фронт тепловой волны. Расширение нагретой области в данном случае происходит по закону $l(t) \sim t^{1/3}$. Площадь под графиком профиля температуры, как и в предыдущем примере, сохраняется.

Уравнение Бюргерса

Уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x = \mu\, u_{xx}$$

представляет собой простейшую модель одномерной гидродинамики с вязкостью μ. Найдем решение в виде бегущей ступеньки (кинка) $u(x,t) = f(\xi), \xi = x - Vt$, где V — скорость волны, принимающее на бесконечности предельные значения

$$\lim_{x\to-\infty} u = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} u = 0.$$

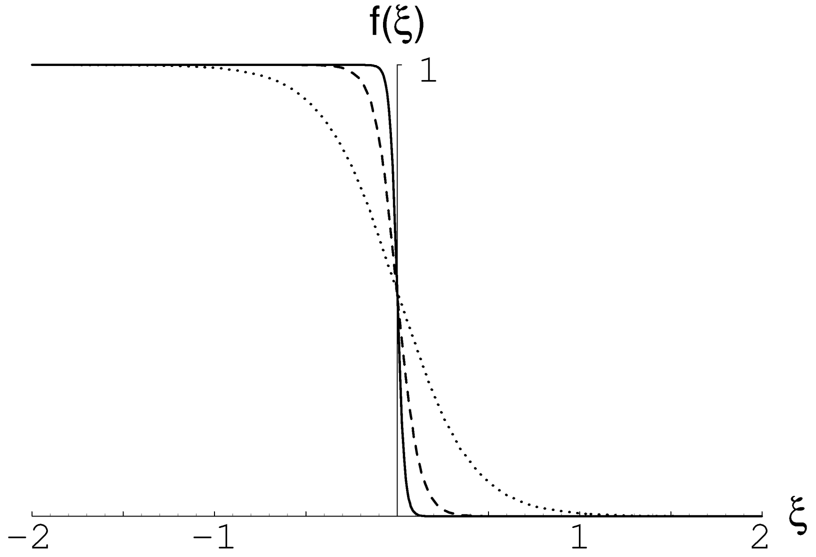

Рис. 6.3: Фронт ударной волны уравнения Бюргерса при разных значениях параметра μ: сплошная линия — $\mu = 0.01$, пунктир — $\mu = 0.03$, точки — $\mu = 0.1$.

Подставляя f в уравнение Бюргерса, получим обыкновенное уравнение второго порядка $\mu f'' - ff' + Vf' = 0$, которое можно один раз проинтегрировать: $\mu f' - f^2/2 + Vf = C_1$. Постоянная $C_1 = 0$ находится по граничному условию при $x \to +\infty$, где функция f и производная f' обращаются в нуль. Из второго условия находим постоянную $V = 1/2$. Уравнение $2\mu f' = f(f-1)$ легко интегрируется $\ln f - \ln(1-f) = \xi/2\mu$ или

$$f(\xi) = \frac{1}{1 + \exp\left(\dfrac{\xi}{2\mu}\right)}.$$

Решение как функция координаты ξ в сопутствующей системе отсчета изображено на рисунке 6.3, откуда видно, что при учете вязкости опрокидывания волны не происходит. Ширина фронта формирующейся ударной волны становится больше, если увеличить вязкость. Ширину фронта можно оценить и непосредственно из решения: $\delta\xi \sim 2\mu$.

Уравнение Кортевега — де Фриза

Уравнение

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

описывает волны в плазме, на мелкой воде и во многих других ситуациях, где имеется простейшая нелинейность и слабая дисперсия. Ищем решение в виде уединенной бегущей волны $u(x,t) = f(x - Vt)$, которое обращается на бесконечности в нуль вместе со всеми производными. Получается обыкновенное уравне-

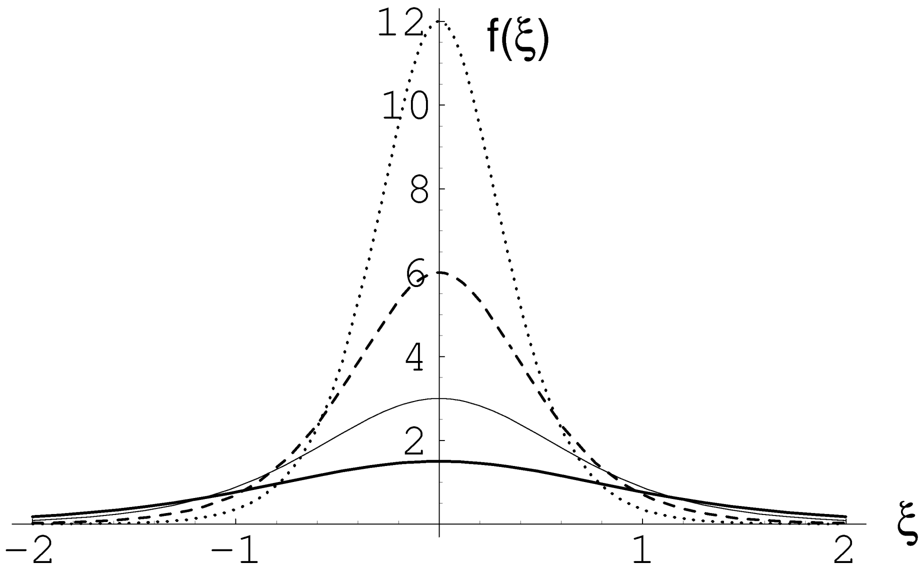

Рис. 6.4: Солитон уравнения Кортевега — де Фриза при разных значениях параметра V: толстая линия $V = 3$, тонкая — $V = 6$, пунктир — $V = 12$, точки — $v = 24$.

ние третьего порядка

$$f''' + 6ff' - Vf' = 0,$$

которое два раза интегрируется

$$f'' + 3f^2 - Vf + C_1 = 0, \quad \frac{1}{2}f'^2 + f^3 - \frac{1}{2}Vf^2 + C_1 f + C_2 = 0.$$

Обе константы интегрирования C_1, C_2 тоже надо выбрать равными нулю, чтобы решение было уединенной волной, т.е. $f = f' = f'' = 0, \xi \to \pm\infty$. В этом случае уравнение еще раз интегрируется совсем просто

$$\xi - C_3 = \frac{1}{\sqrt{V}} \ln \frac{\sqrt{V} + \sqrt{V - 2f}}{\sqrt{V} - \sqrt{V - 2f}}.$$

Третья константа C_3 имеет смысл начала отсчета ξ. Если отсчитывать ξ от C_3, получится решение в виде

$$f(\xi) = \frac{V}{2\,\mathrm{ch}^2 \frac{\sqrt{V}\xi}{2}}.$$

Решение называется *простым солитоном,* солитоном от английских слов solitary wave — уединенная волна, а простым потому, что ширина, амплитуда и скорость волны задаются одним параметром V. Из рис. 6.4 видно, как с ростом скорости V уединенная волна становится более узкой и высокой.