Лекция 8

Разделение переменных в цилиндрических координатах

8.1 Задача о круглой мембране

В данной лекции мы разделим переменные двумерного уравнения Гельмгольца в полярных координатах. Очевидно, что все формулы будут относиться и к трехмерному случаю, когда все величины не зависят от z и используется цилиндрическая система координат. Для определенности рассмотрим механическую задачу о малых колебаниях круглой мембраны радиуса a с закрепленным краем. Осцилляции мембраны описывается двумерным волновым уравнением

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle_2 u = 0, \quad u(a,\varphi,t) = 0,$$

где c — скорость звука, а

$$\triangle_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

— двумерный оператор Лапласа в полярных координатах. Если нас интересуют гармонические колебания, следует искать решение в виде $u(r,\varphi,t) = U(r,\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$. Для функции $U(r,\varphi)$ и частоты ω получится спектральная задача, поставленная к уравнению Гельмгольца

$$\triangle_2 U = -k^2 U, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad U(a,\varphi) = 0. \tag{8.1}$$

Для разделения переменных ищем решение в виде $U = R(r)\Phi(\varphi)$, тогда

$$\frac{(rR')'}{rR} + \frac{\Phi''}{r^2\Phi} = -k^2,$$

а на функцию $\Phi(\varphi)$ получается уравнение $\Phi'' + m^2\Phi = 0$, где m — параметр разделения, принимающий только целые значения, формула **(7.2)**. На радиальную

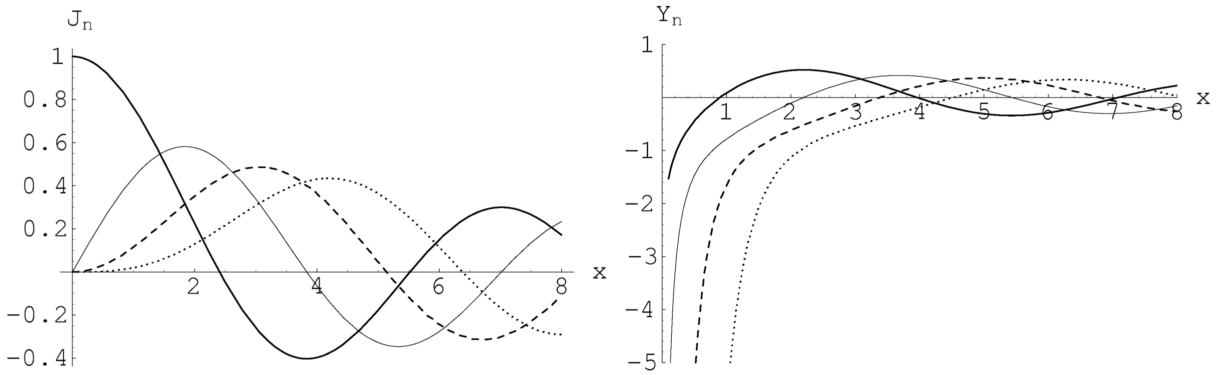

Рис. 8.1: Функции Бесселя $J_n(x)$ и Неймана $Y_n(x)$: толстая линия — $n = 0$, тонкая — $n = 1$, пунктир — $n = 2$, точки — $n = 3$.

часть останется уравнение

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R = 0.$$

Замена переменной $x = kr$ приводит его к универсальному, не зависящему от k виду

$$R'' + \frac{1}{x}R' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) R = 0, \tag{8.2}$$

называемому *уравнением Бесселя*. Решением уравнения являются *функции Бесселя* $J_m(x)$ и *функции Неймана* $Y_m(x)$,[1] изображенные на рисунке 8.1. В нашей задаче о мембране надо искать решение, не имеющее особенностей при $x = 0$, поэтому оставляем только функции Бесселя.

Граничные условия соответствуют требованию $J_m(ka) = 0$ и позволяют определить собственные значения $k_{mn} = j_{mn}/a,$, где j_{mn} означает n-й нуль функции Бесселя порядка m. Значит решение задачи Коши для волнового уравнения можно записать в виде ряда Фурье

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{m,n} \left(A_{mn} \cos \omega_{mn} t + B_{mn} \sin \omega_{mn} t\right) J_m(k_{mn} r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},$$

а коэффициенты A_{mn}, B_{mn} найти из начальных условий. Мы решили задачу о мембране, а теперь перейдем к свойствам функции Бесселя, одной из *цилиндрических функций*, возникающих при разделении переменных уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах. Сводку формул и таблицы всех цилиндрических функций можно найти в справочниках [35, 36]. Там же содержатся таблицы других основных специальных функций. Теория цилиндрических функций с выводами соотношений приведена в книге [37].

[1] Иногда, особенно часто в физической литературе, их обозначают N_m.

8.2 Функции Бесселя

Разложение в ряд

Сначала найдем, как ведет себя решение уравнения Бесселя в нуле, положив $R \sim x^{\sigma}, x \to 0$. Самой старшей степенью в уравнении **(8.2)** будет $x^{\sigma-2}$. Чтобы коэффициент при старшей степени обратился в нуль, должно выполнится условие $\sigma^2 - m^2 = 0$, откуда оставляем $\sigma = +|m|$, а второй корень отбросим, поскольку соответствующее решение имеет особенность при $x \to 0$ и дается функцией Неймана $Y_m(x)$. Теперь выделим степенное поведение в начале координат явно $R = x^m w(x)$, считая, что $m \geq 0$, подставим в исходное уравнение и получим

$$w'' + \frac{2m+1}{x}w' + w = 0.$$

Ищем решение в виде разложения по степеням x: $w = \sum c_n x^n$, подставляем в уравнение и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях

$$\begin{array}{rcc}
x^{-1}: & c_1 = 0 & \\
1: & 2c_2 + 2(2m+1)c_2 + c_0 = 0 & c_2 = -\dfrac{c_0}{4(m+1)} \\
x: & 6c_3 + 3(2m+1)c_3 + c_1 = 0 & \\
x^2: & 12c_4 + 4(2m+1)c_4 + c_2 = 0 & c_4 = -\dfrac{c_2}{8(m+2)}
\end{array}$$

В левом столбце перед знаком двоеточия записана степень x, в среднем — уравнение, которое получается, когда мы приравняем коэффициенты при данной степени, а в правом — получившаяся рекуррентная формула для коэффициента. Видно, что коэффициенты при нечетных степенях исчезают. По приведенному началу можно догадаться до общей формулы для коэффициента при четных степенях, но все они пропорциональны нормировочному коэффициенту c_0, который из уравнения найти нельзя. Его выбирают равным $c_0 = 2^{-m}/m!$, так, чтобы разложение функции Бесселя в ряд выглядело наиболее просто

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} \frac{1}{n!(m+n)!}. \quad \textbf{(8.3)}$$

Заменяя факториалы на Г-функцию Эйлера

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt, \quad \textbf{(8.4)}$$

можно обобщить формулу **(8.3)** на дробные и комплексные индексы

$$J_{\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)}. \quad \textbf{(8.5)}$$

В частности, для отрицательного целого $\nu = -m$ можно заменить индекс суммирования на $n' = n - m = 0, 1, \ldots$. Суммирование начнется с $n' = 0$, потому что предыдущие слагаемые обратятся в нуль из-за бесконечной Γ-функции от целого отрицательного аргумента в знаменателе. Полученная сумма снова сводится к ряду **(8.3)**, получается формула $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$.

Рекуррентное соотношение

Рекуррентное соотношение выводится с помощью того же разложения **(8.3)**

$$J_{m-1} + J_{m+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m-1} \frac{(-1)^n}{n!(m+n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m+1} \frac{(-1)^n}{n!(m+n+1)!} =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m-1} \frac{(-1)^n}{n!(m+n-1)!}$$

$$+ \sum_{n'=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n'+m-1} \frac{(-1)^{n'-1}}{(n'-1)!(m+n')!} = \frac{2m}{x} J_m.$$

Здесь мы в первой сумме выделили нулевое слагаемое, а во второй заменили индекс суммирования на $n' = n + 1$. В результате обе суммы объединились в одну. Получилась формула

$$J_{m-1} + J_{m+1} = \frac{2m}{x} J_m. \qquad \textbf{(8.6)}$$

Упражнение 8.1. Получите тем же способом рекуррентное соотношение для разности

$$J_{m-1} - J_{m+1} = 2J'_m. \qquad \textbf{(8.7)}$$

Интегральные представления и производящие функции

Двумерное уравнение Гельмгольца **(8.1)** имеет частное решение $U(r, \varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}$, которое легко проверить в декартовых координатах. Его можно разложить по собственным функциям лапласиана в полярных координатах

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\sin\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} J_m(kr).$$

Коэффициенты этого ряда Фурье находятся, как обычно, интегрированием

$$c_m J_m(kr) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(\mathrm{i}kr\sin\varphi - \mathrm{i}m\varphi)\, \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

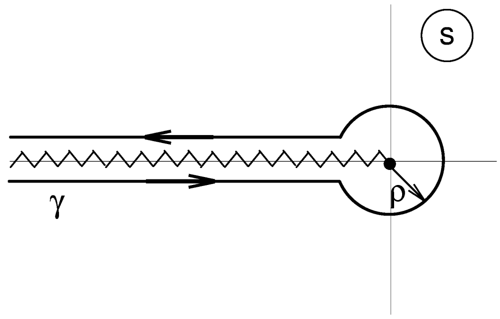

Рис. 8.2: Контур интегрирования в плоскости s для представления Ганкеля функции Эйлера.

Последнее соотношение справедливо при любых $x = kr$, поэтому можно устремить $x \to 0$, получится

$$c_m \frac{x^m}{2^m m!} = \lim_{x\to 0} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}} \right)^n \frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!} \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Самый большой член суммы, не обращающийся в нуль, появляется при $n = m$ (именно в нем содержится экспонента $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$, которая сократится с $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}$). Интеграл равен 2π, поэтому все коэффициенты $c_m = 1$. Таким способом мы сразу получили интегральное представление и *производящую функцию*

$$J_m(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\varphi - \mathrm{i}m\varphi} \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} J_m(x). \tag{8.8}$$

Такое представление обычно называют *представлением Бесселя*, оно справедливо для целых m.

Чтобы обобщить интегральное представление на произвольные ν, сначала выведем две формулы. Начнем с *представления Ганкеля функции Эйлера* (8.4):

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \mathrm{e}^s s^{-z}\, ds, \tag{8.9}$$

где контур γ обходит отрицательную действительную полуось (вдоль которой идет разрез) в положительном направлении, рисунок 8.2. Контур интегрирования разбивается на две прямые и окружность c_ρ радиуса $\rho \to 0$, интеграл по окружности стремится к нулю, а по нижнему и верхнему берегам разреза сводятся к одинаковому виду

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma}\mathrm{e}^{s}s^{z}\,dz=\int\limits_{-\infty}^{-\rho}+\int\limits_{-\rho}^{-\infty}+\int\limits_{c_\rho}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\left[\left(t\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\pi}\right)^{-z}-\left(t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}\right)^{-z}\right]\,dt=$$
$$=\frac{\sin\pi z}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}t^{-z}\mathrm{e}^{-t}\,dt=\frac{\sin\pi z}{\pi}\Gamma(1-z).$$

Чтобы окончательно получить формулу **(8.9)**, надо еще вывести соотношение между Γ-функциями

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}. \qquad \textbf{(8.10)}$$

Воспользуемся известным выражением для B-функции Эйлера

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=\int\limits_{0}^{1}t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt,$$

из которого получается

$$B(z,1-z)=\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\int\limits_{0}^{1}t^{z-1}(1-t)^{-z}\,dt.$$

Заменой переменной $t=\mathrm{e}^{\xi}/\left(1+\mathrm{e}^{\xi}\right)$ сводим его к интегралу в бесконечных пределах

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{z\xi}\,d\xi}{1+\mathrm{e}^{\xi}},$$

который в свою очередь можно найти в таблице или вычислить методом Ватсона — Зоммерфельда как сумму вычетов в полюсах $\xi=\pi\mathrm{i},3\pi\mathrm{i},5\pi\mathrm{i},\ldots$. Получится геометрическая прогрессия

$$2\pi\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{z(2n+1)\pi\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{(2n+1)\pi\mathrm{i}}}=\frac{\pi}{\sin\pi z},$$

что доказывает формулу **(8.10)**, а следовательно и представление Ганкеля **(8.9)**.

Вернемся к выводу интегрального представления функции Бесселя при произвольном ν. Воспользуемся разложением **(8.5)**, где в каждом слагаемом заменим функцию $1/\Gamma(n+\nu+1)$ ее интегральным представлением. Далее поменяем порядок суммирования и интегрирования и заменим переменную интегрирования $s=xt/2$. Тогда сумма соберется в экспоненту, а контурный интеграл останется:

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]\,\frac{dt}{t^{\nu+1}}. \qquad \textbf{(8.11)}$$

Называют эту формулу интегральным представлением *Шлефли*. При целых ν разрез на рис. 8.2 не нужен, контур γ можно замкнуть, тогда заменой $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ представление Шлефли переводится в представление Бесселя (8.8).

Соотношение ортогональности

Соотношение ортогональности мы выведем из дифференциального уравнения Бесселя, записав его для двух значений k, удовлетворяющих нулевым граничным условиям $J_m(k_1a) = J_m(k_2a) = 0$:

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}\right) J_m(k_1r) = -k_1^2 J_m(k_1r), \qquad \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}\right) J_m(k_2r) = -k_2^2 J_m(k_2r).$$

Первое уравнение умножим на $J_m(k_2r)$, второе — на $J_m(k_1r)$ вычтем друг из друга и проинтегрируем по $r\,dr$ от 0 до a. Затем интегрируем по частям и находим

$$r\left[J_m(k_2r)\frac{dJ_m(k_1r)}{dr} - J_m(k_1r)\frac{dJ_m(k_2r)}{dr}\right]_0^a = (k_2^2 - k_1^2)\int\limits_0^a J_m(k_1r)J_m(k_2r)r\,dr.$$

Сразу видно, что решения с $k_1 \neq k_2$ ортогональны. Для одинаковых k в левой и правой частях получается нуль и надо раскрыть неопределенность по правилу Лопиталя. Получится нормировочный множитель, а соотношение ортогональности запишется как

$$\int\limits_0^a J_m\left(j_{mn_1}\frac{r}{a}\right) J_m\left(j_{mn_2}\frac{r}{a}\right) r\,dr = \frac{a^2}{2}\left[J_m'(j_{mn_1})\right]^2 \cdot \delta_{n_1n_2}.$$

Упражнение 8.2. Выведите соотношение ортогональности и найдите нормировочный множитель для другого граничного условия $J_m'(k_1a) = J_m'(k_2a) = 0$.