Лекция 10

Аналитическая теория дифференциальных уравнений

Разделяя переменные в уравнении Гельмгольца в цилиндрических и сферических координатах, мы столкнулись с функциями Бесселя и Лежандра. Исторически так и были открыты цилиндрические, сферические, сфероидальные функции, функции параболического цилиндра и т.п. Нам однако понадобится и более поздний подход, где специальные функции делятся на классы, которые выражаются или не выражаются через гипергеометрическую функцию. Гипергеометрические функции имеют целый ряд замечательных свойств, в частности, интегральные представления, рекуррентные соотношения, производящие функции и т.д. Функции, более сложные, чем гипергеометрические, гораздо менее поддаются исследованию. Для них нет даже интегральных представлений.

Цилиндрические и сферические функции появились в нашем курсе как решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальными коэффициентами. Перейдем к математической теории дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами, рассматривая их в комплексной плоскости. Наша цель — по виду уравнения определить, сводится ли оно к гипергеометрическому.

10.1 Канонический вид

Однородное линейное уравнение второго порядка в комплексной плоскости с полиномиальными коэффициентами $a(z), b(z), c(z)$

$$a(z)w'' + b(z)w' + c(z)w = 0$$

сразу разделим на полином, стоящий перед второй производной. Получится

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0, \tag{10.1}$$

где $p(z)$ и $q(z)$ — рациональные функции. Его можно преобразовать, если решение искать в виде произведения известной функции ϕ на новую неизвестную функцию $w(z) = \phi(z)u(z)$. Назовем такой переход *преобразованием Лиувилля* и отметим, что после преобразования снова получится уравнение с рациональными коэффициентами

$$u'' + \left(2\frac{\phi'}{\phi} + p\right)u' + \left(\frac{\phi''}{\phi} + p\frac{\phi'}{\phi} + q\right)u = 0.$$

Особо выделяют такое преобразование, которое обращает в нуль коэффициент при первой производной. Как легко заметить, для этого надо взять $\phi = \exp(-\frac{1}{2}\int p\,dz)$. Вид получившегося уравнения

$$u'' + I(z)u = 0, \quad I(z) = q - \frac{p^2}{4} - \frac{p'}{2}$$

называется *каноническим*, а функция $I(z)$ — *инвариантом*.

10.2 Разложение вблизи обыкновенной точки

Определение 10.1. Точка $z = z_0$ называется *обыкновенной точкой* уравнения **(10.1)**, если в ее окрестности функции $p(z), q(z)$ аналитичны.

Теорема 10.1. *Если z_0 есть обыкновенная точка уравнения (10.1), то существует такая ее окрестность, в которой решение существует, единственно и аналитично.*

Поясним только идею доказательства. Существование и аналитичность решения доказываются методом Пикара, как и в теории дифференциальных уравнений на действительной оси **[26, 29, 39]**. Для упрощения записи предположим, что $z_0 = 0$ и сразу рассмотрим уравнение в каноническом виде

$$w'' + I(z)w = 0, \quad w(0) = c_0,\ w'(0) = c_1. \tag{10.2}$$

Дважды проинтегрировав, и меняя порядок интегрирования, сведем задачу к интегральному уравнению

$$w = c_0 + c_1 z + \int\limits_0^z (z - z')I(z')w(z')\,dz'.$$

Интегральное уравнение превращается в итерационную схему

$$w_{n+1}(z) = c_0 + c_1 z + \int\limits_0^z (z - z')I(z')w_n(z')\,dz'.$$

Обозначив

$$M = \max_{|z|<R} I(z), \quad m = \max_{|z|<R} w_0(z),$$

где R — радиус круга, лежащего в области аналитичности инварианта $I(z)$, а за нулевое приближение принимаем $w_0 = c_0 + c_1 z$. Для разности соседних приближений находим

$$w_{n+1}(z) - w_n(z) = -\int\limits_0^z (z - z')I(z')\left(w_n(z') - w_{n-1}(z')\right)\, dz'.$$

Теперь остается показать, что получилось сжатое отображение. Можно последовательно получить оценки абсолютных величин разностей и убедиться, что они быстро уменьшаются

$$|w_1 - w_0| \leqslant mM\left|\int\limits_0^z \zeta\, d\zeta\right| \leqslant mM\int_0^\rho \rho'\, d\rho' = mM\frac{\rho^2}{2},$$

$$|w_2 - w_1| \leqslant mM^2\frac{\rho^4}{2\cdot 4}, \ldots, |w_n - w_{n-1}| \leqslant mM^n\left(\frac{\rho^2}{2}\right)^n\frac{1}{n!},$$

где $\rho = |z| < R$. Замечая, что $w_n = w_0 + (w_1 - w_0) + (w_2 - w_1) + \cdots + (w_n - w_{n-1})$, мы сводим исследование сходимости итерационной процедуры к задаче о сходимости ряда. Можно убедиться, что ряд мажорируется абсолютно сходящимся рядом

$$|w_n| \leqslant m\sum_{k=0}^n\left(\frac{M\rho^2}{2}\right)^n\frac{1}{n!} \leqslant m\exp\frac{M\rho^2}{2}.$$

Значит ряд, частичная сумма которого равна w_n, сходится, поэтому сходится и итерационная схема Пикара, откуда следует, что решение интегрального уравнения существует. Ряд сходится равномерно, поэтому решение задачи (10.2) аналитично.

Чтобы доказать единственность, подставим в уравнение (10.2) ряды $w = c_0 + c_1 z + \ldots, I(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, найдем

$$\begin{array}{lrl}
1: & 2c_2 + a_0c_0 = 0 & c_2 = -\frac{1}{2}a_0c_0 \\[2mm]
z: & 6c_3 + a_0c_1 + a_1c_0 = 0 & c_3 = -\frac{1}{6}(a_0c_1 + a_1c_0) \\[2mm]
z^2 & 12c_4 + a_0c_2 + a_1c_1 + a_2c_0 = 0 & c_4 = -\frac{1}{12}(a_0c_2 + a_1c_1 + a_2c_0)
\end{array}$$

Каждый коэффициент выражается только через коэффициенты с меньшими номерами, а два первых нам известны, значит решение строится единственным образом.

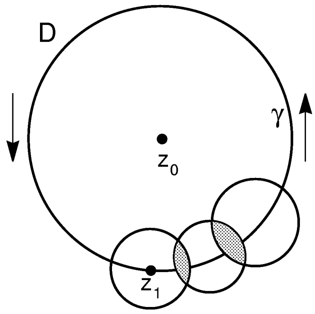

Рис. 10.1: Контур γ для обхода особой точки и разреза.

10.3 Разложение вблизи особой точки

Определение 10.2. Точка z_0 называется *особой точкой* уравнения **(10.1)**, если при $z = z_0$ расположен полюс хотя бы одной из функций функции $p(z)$ или $q(z)$.

Если имеется полюс, область перестает быть односвязной и аналитическое продолжение уже не является однозначной функцией. Выберем такую окрестность D точки z_0, в которой нет других полюсов. Тогда решение из точки $z_1 \in D$ можно продлить вдоль контура γ **(рис. 10.1)** в некоторую окрестность начальной точки как аналитическую функцию. В этой окрестности можно выбрать за центр следующую точку $z_2 \in \gamma$ и из нее снова продолжить решение в новый круг с помощью разложения в ряд Тейлора. Продолжая эту процедуру мы доберемся до любой точки $z \in \gamma$. Если получится бесконечное число кругов, всегда можно выбрать конечное подпокрытие. На рисунке показаны три окрестности и их пересечения. Те же рассуждения справедливы и для второго независимого решения.

Можно показать, что продолжения двух линейно независимых решений w_1 и w_2 останутся линейно независимыми. Действительно, решения удовлетворяют уравнению **(10.1)**

$$w_1'' + pw_1' + qw_1 = 0, \quad w_2'' + pw_2' + qw_2 = 0.$$

Умножим первое уравнение на w_2, второе на w_1 и вычтем друг из друга, получится уравнение первого порядка

$$\Delta' + p\Delta = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix}.$$

Определитель Вронского двух решений $\Delta(z)$ дается экспонентой

$$\Delta(z) = \Delta(z_1) \exp\left(-\int\limits_{z_1}^{z} p(z')\, dz' \right).$$

Отсюда следует, что $\Delta(z) \neq 0$, когда $\Delta(z_1) \neq 0$.

Когда γ — замкнутая кривая, показанная на рисунке, можно вернуться в исходную точку. Решения, полученные продолжением из $w_{1,2}$ после одного обхода в положительном направлении обозначим $w^+_{1,2}$. Новые решения в окрестности начальной точки можно разложить по старым, образующим базис пространства решений

$$w_1^+ = a_{11}w_1 + a_{12}w_2, \quad w_2^+ = a_{21}w_1 + a_{22}w_2.$$

Формулы были бы еще проще, если бы удалось перейти к линейным комбинациям решений $\tilde{w}_{1,2}$, которые при обходе просто умножались бы на число

$$\tilde{w}_1^+ = a_{11}\tilde{w}_1 + a_{12}\tilde{w}_2 = \lambda\tilde{w}_1, \quad \tilde{w}_2^+ = a_{21}\tilde{w}_1 + a_{22}\tilde{w}_2 = \lambda\tilde{w}_2.$$

отсюда видно, что λ суть собственные числа матрицы $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$, а нужные нам линейные комбинации решений даются ее собственными векторами. Возможны два варианта: матрица A либо приводится к диагональному виду $A \sim \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$, либо ее можно привести к жордановой клетке $A \sim \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$. Рассмотрим их последовательно.

1°. При обходе решения $\tilde{w}_{1,2}$ просто умножаются на число $\lambda_{1,2}$. Есть такая эталонная функция $f(z) = z^\rho$, которая при обходе так же приобретает множитель: $f^+ = f \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\rho}$. Назовем *характеристическим показателем* показатель такой степенной функции, которая при обходе точки **0** приобретает тот же самый множитель, что решение при обходе полюса. Тогда характеристические показатели наших решений

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \ln \lambda_{1,2}.$$

Для простоты записи снова предположим, что $z_0 = 0$ (то есть сдвинем полюс в начало координат), тогда отношение решения к степенной функции с тем же характеристическим показателем уже однозначная функция при обходе и следовательно разлагается в ряд Лорана. Тогда мы можем написать общий вид разложения решений в окрестности начала координат

$$\tilde{w}_{1,2} = z^{\rho_{1,2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(1,2)} z^n, \tag{10.3}$$

где $c_n^{(1,2)}$ — наборы коэффициентов.

2°. Жорданова клетка отвечает преобразованию

$$\tilde{w}_1^+ = \lambda\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2, \quad \tilde{w}_2 = \lambda\tilde{w}_2.$$

Второе решение $\tilde{w}_2$ просто умножается на число, поэтому имеет такой же вид (10.3) степенной функции, умноженной на ряд Лорана. Если разделить первое уравнение на второе, мы увидим, что отношение решений приобретает при обходе слагаемое

$$u^+ = u + \frac{1}{\lambda}, \quad u \equiv \frac{\tilde{w}_1}{\tilde{w}_2}.$$

Эталоном служит логарифмическая функция $f(z) = \ln z$, $f^+ = f + 2\pi\mathrm{i}$. Чтобы добавка при обходе имела правильную величину, надо поставить перед логарифмом коэффициент $1/2\pi\mathrm{i}\lambda$, тогда разность $u(z) - \ln z/2\pi\mathrm{i}\lambda$ однозначная функция и разлагается в ряд Лорана. Отсюда найдем, что общий вид отношения решений u в логарифмическом случае

$$\frac{\tilde{w}_1}{\tilde{w}_2} = \frac{\ln z}{2\pi\mathrm{i}\lambda} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \tag{10.4}$$

представляет собой сумму логарифма и ряда Лорана.

Определение 10.3. Если в ряде Лорана (10.3) или (10.4) содержится лишь конечное число слагаемых с отрицательными степенями, то особая точка z_0 называется *регулярной* или правильной уравнения (10.1). Если имеется бесконечный набор членов с отрицательными показателями, особая точка z_0 называется *иррегулярной* или неправильной.

10.4 Теорема Фукса

Возникает естественный вопрос: можно ли по виду коэффициентов уравнения определить, какая у него особая точка? Ответ на него дает следующая теорема.

Теорема 10.2. *Теорема Фукса. Точка z_0 — регулярная особая точка уравнения (10.1) тогда и только тогда, когда $p(z)$ имеет при $z = z_0$ полюс не выше первого порядка, а $q(z)$ — не выше второго порядка.*

Достаточность показывается выписыванием явного вида уравнения с полюсами в окрестности $z_0 = 0$

$$w'' + \frac{p_0}{z}w' + \frac{q_0}{z^2}w = 0, \tag{10.5}$$

где p_0, q_0 постоянные. Как и в примерах предыдущих двух лекций, ищем $w(z)$ в окрестности в степенном виде $w = z^\rho$ и получаем *определяющее уравнение*

$$\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = 0,$$

решение которого дает нам оба характеристических показателя. Теперь можно искать решение уравнения (10.5) в виде $w = z^\rho u(z)$, где u — новая неизвестная функция, а $\rho = \rho_1$ или ρ_2 — один из характеристических показателей. Можно показать, что $u = \mathrm{const}$ — решение, а следовательно $z = 0$ — регулярная особая точка. Заметим, что характеристические показатели определены с точностью до целочисленного слагаемого, поэтому в регулярной особой точке вместо общего ряда Лорана всегда можно выписать разложение в ряд Тейлора. Если $q_0 = 0$, то один из характеристических показателей получается целым.

Необходимость можно продемонстрировать, записывая оба решения в виде произведения степенной функции на аналитическую $w_{1,2} = z^{\rho_{1,2}} u_{1,2}(z)$. Функцию $p(z)$ мы найдем из вронскиана $p = -(\ln \Delta)' = (\rho_1 + \rho_2 - 1)/z$ и убедимся, что она имеет полюс первого порядка. Функцию $q(z)$ найдем из уравнения $q = -w''/w - pw'/w$ и получится полюс будет второго порядка.

Замечание 10.1. Случай бесконечно удаленной особой точки надо рассмотреть отдельно. Замена независимой переменной $t = 1/z$ переведет особую точку в $t = 0$. Остается применить теорему Фукса к задаче

$$\ddot{w} + \left(\frac{2}{t} - \frac{p(1/t)}{t^2}\right)\dot{w} + \frac{q(1/t)}{t^4} w = 0.$$

Таким образом, для регулярности точки $z = \infty$ функция $p(z)$ должна иметь на бесконечности нуль не ниже первого порядка, а функция $q(z)$ — не ниже второго порядка.

10.5 Уравнения класса Фукса

Теперь мы знаем, как локально определить, какого типа особая точка и перейдем к глобальным свойствам уравнений на все комплексной плоскости. Оказывается, регулярность особых точек (если их немного) накладывает сильные ограничения на уравнение.

Определение 10.4. Уравнение принадлежит к *классу Фукса*, если на всей расширенной комплексной плоскости оно имеет только регулярные особые точки.

Для уравнений класса Фукса, пользуясь теоремой 10.2 с полюсами в точках $z = \alpha_k$ можно выписать функции p, q:

$$p(z) = \sum_k \frac{A_k}{z - \alpha_k}, \quad q(z) = \sum_k \left[\frac{B_k}{(z - \alpha_k)^2} + \frac{C_k}{z - \alpha_k}\right]$$

с неопределенными коэффициентами A_k, B_k, C_k, а условие регулярности на бесконечности дает ограничение на коэффициенты $C_k : \sum_k C_k = 0$.

1. *Одна регулярная особая точка.* Переводим $\alpha_1 \to \infty$ преобразованием $z \to 1/(z - \alpha_1)$, тогда $A_1 = B_1 = C_1 = 0$ и уравнение сведется к виду $w'' = 0$. Решение — линейная функция $w(z) = c_0 + c_1 z$.

2. *Две регулярные особые точки.* Переводим $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to \infty$ преобразованием $z \to (z - \alpha_1)/(z - \alpha_2)$, тогда $C_0 = 0$ и получается уравнение Эйлера $w'' + \frac{A_0}{z} w' + \frac{B_0}{z^2} w = 0$. Уравнение оказалось однородным, поэтому заменой $\zeta = \ln z$ сводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

3. *Три регулярные особые точки.* Переводим особые точки в стандартные положения $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 1$, $\alpha_3 \to \infty$: $z \to (z-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)/(z-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_1)$. Уравнение сведется к *гипергеометрическому уравнению Гаусса*, которое мы выпишем в следующей лекции.

4. *Четыре регулярные особые точки и более.* Никакими дробно-линейными преобразованиями не удается перевести особые точки в стандартные положения, поэтому каждое уравнение надо рассматривать отдельно и для таких специальных функций полная теория до сих пор не построена.

Цель, поставленная в начале лекции, достигнута. Исследование уравнения с полиномиальными коэффициентами сводится к подсчету числа полюсов и их порядка. Если в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ имеется одна или две регулярные особые точки, решение уравнения — элементарная функция. Если регулярных особых точек три, решение находится в классе гипергеометрических функций, а если четыре или больше, то анализ кардинально усложняется.