Лекция 11

Гипергеометрические функции

11.1 Функция Гаусса

Гипергеометрическое уравнения Гаусса

$$z(1-z)w'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]\, w' - \alpha\beta w = 0. \qquad \textbf{(11.1)}$$

имеет три регулярные особые точки $z = 0, 1, \infty$. На сфере Римана они расположены на полюсах и экваторе. Если искать решение в виде ряда, выбрать $c_0 = 1$ и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях, то получится *гипергеометрический ряд* или *гипергеометрическая функция (Гаусса)*

$$w = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \cdots . \qquad \textbf{(11.2)}$$

Здесь α, β, γ — параметры, а z — переменная. Точка с запятой отделяет параметры в числителе, знаменателе и переменную. Нижний индекс слева указывает количество параметров в числителе, а справа — в знаменателе каждого слагаемого. Такие обозначения пришли из теории обобщенных гипергеометрических рядов, где индексы могут быть любыми натуральными числами. Индексы в литературе чаще всего не пишут, а функции отличают друг от друга по числу параметров.

Приведем несколько очевидных свойств гипергеометрической функции. Эти и многие другие свойства гипергеометрической функции выводятся в справочнике [38].

1. В единичном круге $|z| < 1$ гипергеометрический ряд сходится абсолютно.

2. Параметры α, β входят симметрично: ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = {}_2F_1(\beta, \alpha; \gamma; z)$.

3. Если α или β целое отрицательное число или нуль, то ряд обрывается и становится многочленом. Если $\gamma = -n$ целое отрицательное число или нуль, то ряд (11.2) не определен и надо пользоваться другим решением

$$w = z^{n+1}\, {}_2F_1(\alpha+n+1, \beta+n+1; n+2; z).$$

Это решение находится с помощью преобразования Лиувилля $w(z) = z^\sigma u(z)$, если подобрать σ так, чтобы уравнение оставалось гипергеометрическим.

11.2 Вырожденная гипергеометрическая функция

Особенно часто в задачах встречается предельный случай функции Гаусса — *вырожденная* (или конфлюентная) *гипергеометрическая функция*, которая дается рядом Куммера

$$ {}_1F_1(\alpha;\gamma;z) = \lim_{\beta\to\infty} {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;\frac{z}{\beta}) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \cdots . \qquad \textbf{(11.3)} $$

Дифференциальное уравнение получается из уравнения Гаусса **(11.1)** предельным переходом. Замена $z \to z/\beta$ переводит вторую регулярную особую точку из $z = 1$ в $z = \beta$. После предельного перехода $\beta \to \infty$ вторая точка устремляется в бесконечность и сливается с третьей. Получается *вырожденное гипергеометрическое уравнение*

$$ zw'' + (\gamma - z)w' - \alpha w = 0. \qquad \textbf{(11.4)} $$

1. Вырожденный гипергеометрический ряд имеет бесконечный радиус сходимости. При целом отрицательном параметре α ряд **(11.3)** обрывается и вырожденная гипергеометрическая функция становится полиномом.

2. Уравнение **(11.4)** имеет две особые точки: регулярную особую точку $z = 0$ с характеристическими показателями $\rho_1 = 0, \rho_2 = 1 - \gamma$ и иррегулярную $z = \infty$. Последняя образовалась из-за слияния двух регулярных точек уравнения Гаусса. Поведение одного из решений на бесконечности экспоненциальное $w \sim \mathrm{e}^z$.

3. Преобразование Лиувилля вида $w(z) = e^z u(z)$ не меняет тип уравнения, если одновременно сменить знак z, откуда получается *преобразование Куммера*
$$ {}_1F_1(\alpha;\gamma;z) = \mathrm{e}^z\, {}_1F_1(\gamma-\alpha;\gamma;-z). $$

4. Если подобрать степенное преобразование Лиувилля $w(z) = z^\sigma u(z)$ так, чтобы уравнение оставалось вырожденным гипергеометрическим, мы получим второе решение
$$ w_2(z) = z^{1-\gamma}\, {}_1F_1(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;z). $$

11.3 Примеры

Уравнение Лежандра

$$(1-x^2)u''-2xu'-\lambda u=0$$

(9.4) имеет три особые точки $x=\pm1,\infty$. Для $x=\pm1$ $p(z),q(z)$ имеет полюсы первого порядка, а при $x=\infty$ $p(x)$ имеет нуль первого порядка, а $q(x)$ — нуль второго порядка. Отсюда по теореме Фукса получаем, что все три особые точки регулярные, поэтому уравнение Лежандра сведется к гипергеометрическому. Перевести точки в стандартные положения можно линейным преобразованием $z=(x+1)/2$, тогда уравнение сведется к виду $z(z-1)u''+(2z-1)u'+\lambda u=0$. Сравнивая с **(11.1)**, находим корни $\alpha_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda}$, один из которых надо выбрать за α, другой за β. Условие обрыва ряда из лекции **9** получим просто приравняв один из корней целому неположительному числу $-l, l=0,1,2,\dots\Rightarrow\lambda=-l(l+1)$.

Уравнение Бесселя

Уравнение Бесселя запишем для произвольного индекса ν

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$$

При $x=0$ функция $p(x)$ имеет полюс первого порядка, а $q(x)$ — второго порядка. При $x=\infty$ p имеет нуль первого порядка, а q вообще не имеет нуля: $q(x)\to1, x\to\infty$. Значит уравнение имеет на бесконечности иррегулярную особую точку. Асимптотика вблизи нуля найдется из определяющего уравнения. Если подставить $y=x^\rho$, получится $\rho_{1,2}=\pm\nu$. На бесконечности уравнение перейдет в $y''+y=0$, решения которого $y_{1,2}=\exp(\pm\mathrm{i}x)$. Исключаем асимптотики подстановкой $y=x^\nu\exp(\mathrm{i}x)u(x)$. Получится

$$xu''+\left[(2\nu+1)+2\mathrm{i}x\right]u'+\mathrm{i}(2\nu+1)u=0,$$

а его можно свести к вырожденному гипергеометрическому заменой независимой переменной $-2\mathrm{i}x=z$. Сравнивая с **(11.4)**, найдем параметры $\alpha=\nu+\frac{1}{2},\gamma=2\nu+1$

$$J_\nu(x)=Cx^\nu\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,{}_1F_1\left(\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;-2\mathrm{i}x\right).$$

Если $\gamma=2\alpha$, то вырожденная гипергеометрическая функция сводится к цилиндрической.

Линейный осциллятор

Уравнение Шредингера для одномерного гармонического осциллятора с оператором Гамильтона $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + m\omega^2 x^2/2$

$$\psi'' - x^2\psi = -k^2\psi, \quad k^2 = 2E,\ \hbar = m = \omega = 1 \tag{11.5}$$

в теории специальных функций называется уравнением Вебера. Такие уравнения возникают при разделении переменных в параболических цилиндрических координатах, поэтому весь класс функций называется функциями параболического цилиндра. Уравнение Вебера имеет одну иррегулярную особую точку $x = \infty$. Точка $x = 0$ обыкновенная, характеристические показатели в обыкновенной точке $\sigma = 0, 1$. Оба показателя годятся, чтобы получить регулярное в нуле решение, поэтому будем их анализировать последовательно.

Решение на бесконечности ищем в виде $\psi = \exp(\mu x^\sigma)$, это общий вид для иррегулярной особой точки. Подставляя в **(11.5)**, получим

$$\mu^2\sigma^2 x^{2\sigma-2} + \mu\sigma(\sigma-1)x^{\sigma-2} - x^2 = -k^2.$$

При $x \to \infty$ правой частью можно пренебречь по сравнению с x^2, а вторым слагаемым — по сравнению с первым, когда $\sigma > 0$. Оставшееся равенство позволяет найти сразу и показатель $\sigma = 2$, и коэффициент $\mu = \pm\frac{1}{2}$. Нас интересует корень со знаком минус, чтобы решение было регулярным при $x \to \infty$.

1°. ***Четные решения.*** Замена $\psi = \exp(-x^2/2)u(x)$ сводит уравнение к виду

$$u'' - 2xu' + (k^2-1)u = 0,$$

который пока не похож на гипергеометрические уравнения. Однако поведение при $x \to \infty$ подсказывает, что нужна еще замена независимой переменной $t = x^2$. Получится

$$t\ddot{u} + \left(\frac{1}{2} - t\right)\dot{u} + \frac{k^2-1}{4}u = 0,$$

где точкой обозначена производная по t. Это вырожденное гипергеометрическое уравнение, решение которого $u = {}_1F_1((1-k^2)/4; 1/2; x^2)$ представляет собой ряд, который ведет себя при $x \to \infty$ как $\exp(x^2)$. Даже с учетом множителя $\exp(-x^2/2)$ получится особенность на бесконечности. Ряд обрывается при дискретных значениях k, когда параметр $\alpha = -n$ равен нулю или целому отрицательному числу, $k_n^2 = 4n + 1$. Для энергии получается $E_n = 2n + \frac{1}{2}$.

2°. ***Нечетные решения.*** Преобразование Лиувилля $\psi = x\exp(-x^2/2)u(x)$ после замены $x^2 = t$ дает вырожденное гипергеометрическое уравнение

$$t\ddot{u} + \left(\frac{3}{2} - t\right)\dot{u} + \frac{k^2-3}{4}u = 0,$$

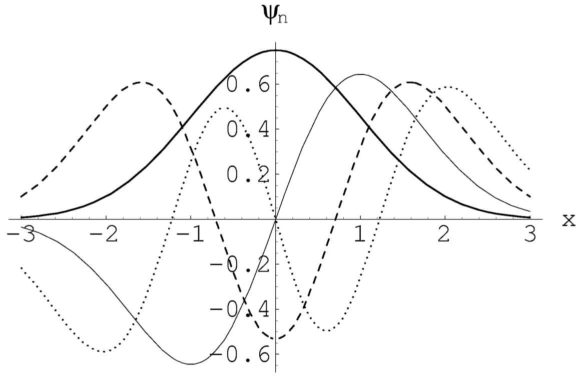

Рис. 11.1: Волновые функции осциллятора $\psi_n(x)$: толстая линия — $n = 0$, тонкая — $n = 1$, пунктир — $n = 2$, точки — $n = 3$.

откуда $u = {}_1F_1((3-k^2)/4; 3/2; x^2)$. Чтобы обеспечить обрыв ряда, надо выбрать $k_n^2 = 4n+3$ ($E_n = 2n+1+\frac{1}{2}$). Многочлены ${}_1F_1(-n; \frac{1}{2}; x^2)$, $x\,{}_1F_1(-n; \frac{3}{2}; x^2)$ называются *полиномами Эрмита*. Принятая нормировка дается формулой Родрига

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Волновые функции одномерного гармонического осциллятора показаны на рисунке 11.1. Номер функции соответствует количеству ее нулей.

Атом водорода

Уравнение Шредингера для атома водорода в сферических координатах, где $\hat{H} = \hat{p}^2/2 - 1/r$ (в атомных единицах, где $e = \hbar = m = 1$). Переменные разделяются, потому что поле центральное:

$$\left(\triangle + \frac{2}{r}\right)\psi = \varkappa^2\psi, \quad \psi = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Радиальное уравнение

$$R'' + \frac{2}{r}R' - \left(\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{r} + \varkappa^2\right)R = 0$$

сводим к (11.4), потому что особые точки две — регулярная и иррегулярная. При $r \to 0$ уравнение имеет степенное решение $R = r^\rho, \rho_1 = l, \rho_2 = -l-1$. Выбираем первый корень, чтобы решение не имело особенности. При больших r уравнение переходит в $R'' - \varkappa^2 R = 0$, из двух его решений оставляем убывающую экспоненту $R = \exp(-\varkappa r)$, чтобы избежать особенности на бесконечности. Действуя по стандартной схеме, заменяем неизвестную функцию $R = r^l \mathrm{e}^{-\varkappa r} u(r)$ и получаем

$$ru'' + 2(l+1-\varkappa r)u' - 2(\varkappa l - 1 + \varkappa)u = 0.$$

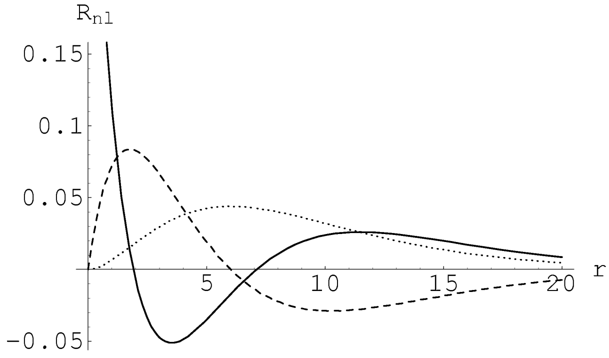

Рис. 11.2: Радиальные волновые функции водорода $R_{nl}(r)$ при $n = 3$: сплошная линия — $l = 0$, пунктир — $l = 1$, точки — $l = 2$.

Уравнение сводится к вырожденному гипергеометрическому заменой независимой переменной $z = 2\varkappa r$

$$u = {}_1F_1\left(l + 1 - \frac{1}{\varkappa}; 2l + 2; 2\varkappa r\right).$$

Чтобы ряд обрывался, первый параметр надо приравнять $-n_r, n_r = 0, 1, 2, \ldots$, откуда получается формула Бальмера $E_n = -1/2n^2, n = n_r + l + 1$ называется главным квантовым числом, а n_r — радиальным квантовым числом.

Само вырожденное гипергеометрическое уравнение с целым отрицательным (или нулевым) параметром $\alpha = -n, n = 0, 1, \ldots$

$$xy'' + (\nu + 1 - x)y' + ny = 0 \tag{11.6}$$

называется *уравнением Лагерра*, а его решения $y = L_n^\nu$ называются *обобщенными полиномами Лагерра*. При $\nu = 0$ получаются обычные полиномы Лагерра. Радиальные волновые функции окончательно можно записать через полиномы Лагерра $R_{nl}(r) = C_{nl} r^l \mathrm{e}^{-\varkappa r} L_{n-l-1}^{2l+1}(2\varkappa r)$, где $0 \leqslant l < n$, а нормировочный множитель C_{nl} вычислен, например, в [5]. Примеры радиальных волновых функций приведены на рис. 11.2.

Упражнение 11.1. Решить при $\mathcal{E} = 0$ уравнения (7.3) для атома водорода, которые получились при разделении переменных в параболических координатах.

11.4 Полиномы Лагерра

Выведем несколько свойств полиномов Лагерра ($\nu = 0$), пользуясь методом Лапласа. Чтобы получить лапласовский образ уравнения (11.6), надо заменить

$$\frac{d}{dx} \to p, \quad x \to -\frac{d}{dp},$$

сохраняя порядок операторов. Получится

$$-\frac{d}{dp}p^2w + pw + \frac{d}{dp}pw + nw = 0 \Rightarrow p(1-p)w' + (n+1-p)w = 0,$$

где $w(p)$ — образ функции $y(x)$. Уравнение первого порядка можно решить, получится $w = (1-p)^n/p^{n+1}$. Остается выполнить обратное преобразование Лапласа

$$y(x) = \oint \frac{dp}{2\pi \mathrm{i}} \mathrm{e}^{px} \frac{(1-p)^n}{p^{n+1}} = \operatorname*{Res}_{p=0} \mathrm{e}^{px} \frac{(1-p)^n}{p^{n+1}} = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dp^n}\left[(1-p)^n \mathrm{e}^{px}\right]_{p=0},$$

где интегрирование ведется по контуру, обходящему полюс $p = 0$ в положительном направлении. Для упрощения записи, обозначим $q = px$, а затем $z = x - q$:

$$y(x) = \frac{x^n}{n!}\frac{d^n}{dq^n}\left(1 - \frac{q}{x}\right)^n \mathrm{e}^q\bigg|_{q=0} = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{dz^n} z^n \mathrm{e}^{x-z}\bigg|_{z=x}.$$

В новых обозначениях можно вынести $\exp x$ за оператор дифференцирования, обозначить z и x одной буквой и получить формулу Родрига. Обычно ее пишут без множителя $(-1)^n$:

$$L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n \mathrm{e}^{-x}\right).$$

Упражнение 11.2. Выведите производящую функцию

$$F(x,h) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n L_n(x) = \frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h}.$$

Упражнение 11.3. Покажите, что решение уравнения

$$x^2y'' + (ax+b)y' + (Ax^2 + Bx + C)y = 0$$

сведется к вырожденному гипергеометрическому при произвольных константах a, b, A, B, C.