

# ЛЕКЦИЯ 12

## Асимптотические методы

Мы столкнулись с тем фактом, что для немногих дифференциальных уравнений удается получить ответ в виде формулы. Однако в приложениях часто и нет необходимости в точных формулах, потому что имеется малый или большой параметр. Цель асимптотических методов, с которыми мы познакомимся в следующих трех лекциях, — научиться использовать большой (или малый) параметр для решения уравнений. Начнем мы не с уравнений, а с асимптотик интегралов, а перед этим напомним, что такое асимптотическое разложение. Среди многочисленных книг, посвященных асимптотическим методам (см., например, [40–46]), можно рекомендовать сравнительно простое, но современное введение [47] в асимптотические методы вычисления интегралов.

### 12.1 Асимптотическое разложение

**Определение 12.1.** Ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

называется *асимптотическим разложением* функции  $f(z)$  при  $z \rightarrow z_0$ , если остаток ряда является величиной более высокого порядка малости

$$R_N = f(z) - \sum_{n=0}^N c_n (z - z_0)^n = O((z - z_0)^N)$$

или

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R_N}{(z - z_0)^N} = 0.$$

В тех же обозначениях обычная сходимость означает

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0,$$

а значит ряд может расходиться в обычном смысле, но быть асимптотическим разложением. В качестве асимптотического разложения в окрестности бесконечности можно взять разложение по степеням  $t = 1/z \rightarrow 0$ . Приведем несколько свойств асимптотического разложения.

1° Если асимптотическое разложение существует, то оно единственно. Действительно, если пределы существуют, можно найти последовательно все коэффициенты  $c_n$

$$c_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z), \quad c_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - c_0}{z - z_0}, \quad c_2 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - c_0 - c_1(z - z_0)}{(z - z_0)^2}, \dots$$

2° Асимптотические разложения двух разных функций могут совпадать. Например,  $\exp(-1/z) \approx 0$  при  $z \rightarrow +0$  (знаком  $\approx$  мы обозначили асимптотическое равенство).<sup>1</sup> Действительно,  $c_n = \lim z^{-n} \exp(-1/z) = 0$ .

3° Асимптотические разложения можно складывать, умножать, интегрировать, но нельзя дифференцировать. Примером может служить функция  $f(x) = e^{-x} \sin e^x$ . Все коэффициенты ее асимптотического разложения при  $x \rightarrow +\infty$  равны нулю, как и в примере 2°, а первая производная  $f'(x) = -f(x) + \cos \exp x$  не имеет асимптотического разложения. Пределы из пункта 1° не существуют, нельзя даже найти коэффициента  $c_0$ .

## 12.2 Интеграл Лапласа

*Интегралом Лапласа* называют

$$F(\lambda) = \int_a^b A(t) e^{\lambda S(t)} dt, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (12.1)$$

где  $A(t)$ ,  $S(t)$  действительные функции, которые мы будем называть амплитудной и фазовой, соответственно, а  $\lambda$  — большой действительный параметр. Если параметр велик, очевидно, что вклад в интеграл вносит небольшая окрестность точки максимума функции  $S(t)$ . Здесь возможны два случая

1° Если функция монотонна  $S'(t) \neq 0$ ,  $x \in [a, b]$ , а максимум достигается в одной из конечных точек, например, при  $t = a$ , то вклад в интеграл вносит только окрестность точки  $a$ . Рис. 12.1 (а) показывает, что интеграл набирается в окрестности размером  $\sim 1/\lambda$ , поэтому и главный член разложения должен получиться того же порядка.

<sup>1</sup>Часто в литературе встречается знак  $\sim$ , а иногда пишут просто  $=$ .

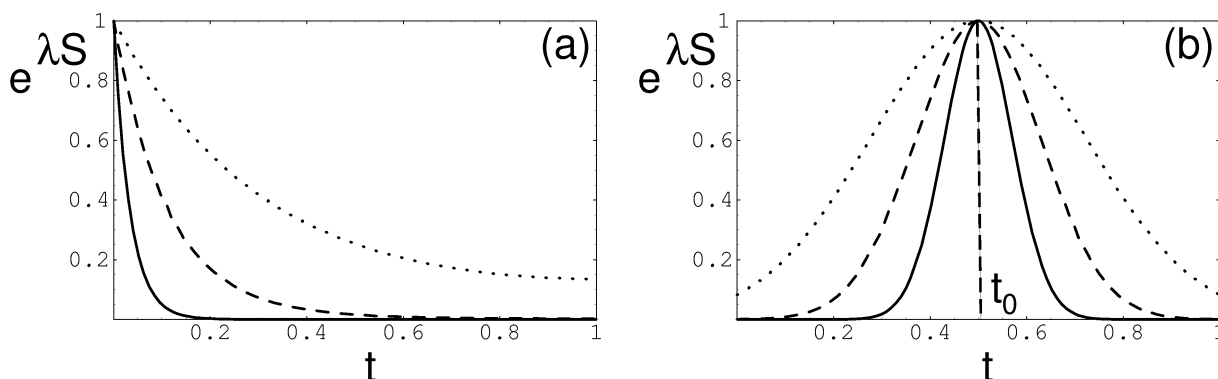


Рис. 12.1: (а) — случай 1°,  $S = -3t + t^3$ . При увеличении параметра  $\lambda = 1, 3, 10$  (точки, пунктир и сплошная линия, соответственно) вклад в интеграл дает все меньшая окрестность точки  $a = 0$ . (б) — случай 2°,  $S = -(t - 1/2)^2$ . При увеличении параметра  $\lambda = 10, 30, 100$  вклад в интеграл дает все меньшая окрестность точки  $t_0 = 0.5$ .

2° Если функция достигает максимума в промежуточной точке  $S'(t_0) = 0, t_0 \in (a, b), S''(t_0) < 0$ , то из разложения фазовой функции в ряд до квадратичных членов

$$S(t) = S(t_0) + \frac{1}{2}S''(t_0)(t - t_0)^2 \tag{12.2}$$

видно, что интеграл в основном набирается при  $|t - t_0| \lesssim 1/\lambda^{1/2}$ . На рис. 12.1 (б) приведен пример, демонстрирующий, что с ростом параметра  $\lambda$  подынтегральная функция велика все в меньшей окрестности точки  $t_0$ .

В случае 1° формула для главной асимптотики выводится с помощью интегрирования по частям

$$F(\lambda) = \int_a^b A(t) \frac{de^{\lambda S(t)}}{\lambda S'(t)} = \frac{A(t)e^{\lambda S(t)}}{\lambda S'(t)} \Big|_a^b - \int_a^b \left( \frac{A(t)}{\lambda S'(t)} \right)' e^{\lambda S(t)} dt.$$

Последовательное интегрирование по частям даст следующие члены разложения по степеням  $1/\lambda$ . Отсюда, когда  $S(a) > S(b), S'(t) \neq 0$ , получим оценку

$$F \approx -\frac{A(a)e^{\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)}. \tag{12.3}$$

Получилась величина  $\sim 1/\lambda$ , что соответствует приведенным качественным рассуждениям.

Для случая 2° заменим функцию  $S(t)$  разложением (12.2), а амплитуду возьмем в точке  $t_0$ . Получится

$$F(\lambda) = A(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \lambda \left( S(t_0) + \frac{1}{2}S''(t_0)\tau^2 \right) d\tau,$$

где мы заменили обозначили  $t - t_0 = \tau$ , а пределы интегрирования по  $\tau$  распространили от  $-\infty$  до  $\infty$ . Так как  $S''(t_0) < 0$ , оценка свелась к известному интегралу Пуассона. Окончательно получим

$$F \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda S''(t_0)}} A(t_0) e^{\lambda S(t_0)}, \quad (12.4)$$

т.е. величину порядка  $1/\lambda^{1/2}$ , как и ожидали.

Пример 12.1. Интеграл

$$F(a) = \int_0^{\infty} \exp\left(-x^2 - \frac{a}{x}\right) dx. \quad a \rightarrow +\infty$$

прямо не годится для применения полученных формул, потому что функция  $1/x$  стремится к бесконечности при  $x \rightarrow +0$ . Чтобы свести его к виду (12.1), изменим в  $\mu$  раз масштаб переменной  $x = \mu t$ ,  $dx = \mu dt$ . Тогда показатель экспоненты запишется как  $\lambda S = -\mu^2(t^2 + a/\mu^3 t)$ . Если выбрать  $\mu = (a/2)^{1/3}$  то выражение в круглой скобке станет фазовой функцией  $S(t) = -t^2 - 2/t$ , а  $\mu^2$  за скобкой — большим параметром  $\lambda = \mu^2$ . Остается лишь два раза продифференцировать  $S(t)$ , найти значения  $S(t)$  и ее второй производной в стационарной точке

$$S'(t) = -2t + \frac{2}{t^2} = 0 \Rightarrow t_0 = 1, \quad S(t_0) = -3, \quad S''(t_0) = -6$$

и получить из (12.4) оценку

$$F(a) \approx \sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{-3(\frac{a}{2})^{2/3}}.$$

Отметим, что даже при  $a = 0$ , когда интеграл равен  $F(0) = \sqrt{\pi}/2$ , асимптотическая формула дает приличную точность  $F(0) \approx \sqrt{\pi}/\sqrt{3}$ .

Пример 12.2. Гамма-функцию Эйлера

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} \xi^x e^{-\xi} d\xi, \quad x \rightarrow +\infty$$

можно свести к виду (12.1), если записать  $\xi^x = e^{x \ln \xi}$  и перейти к новой переменной  $\xi = xt$ . Тогда  $d\xi = x dt$ ,  $S(t) = -t + \ln t$ ,  $\lambda = x$ . Имеется одна стационарная точка  $t_0 = 1$ ,  $S(t_0) = S''(t_0) = -1$ . Из формулы (12.4) получаем асимптотику

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x,$$

которая при целых  $x$  известна как формула Стирлинга. Формула Стирлинга дает весьма точную оценку факториала  $n! = \Gamma(n+1)$ . Даже при  $x = 2$  получается  $2! \approx 1.919$ .

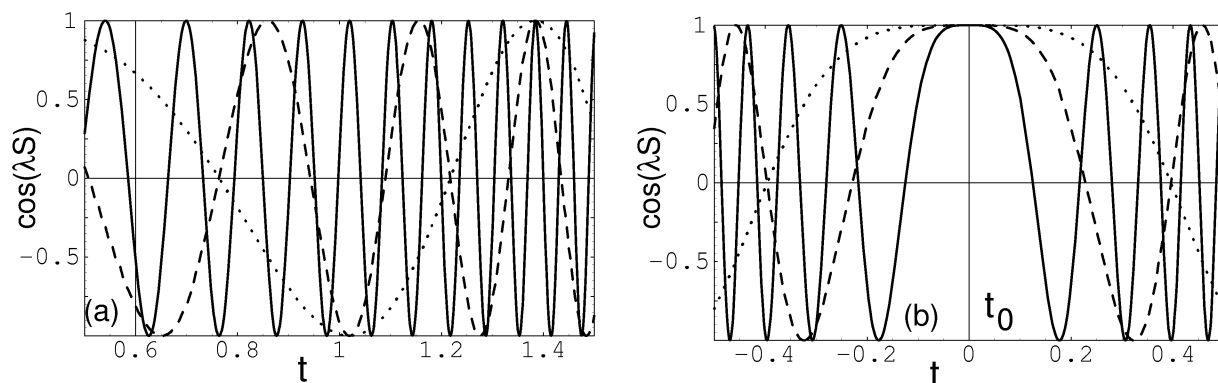


Рис. 12.2: (а) — случай 1°,  $S = t - 4t^2$ . При увеличении параметра  $\lambda = 1, 3, 10$  (точки, пунктир и сплошная линия, соответственно) вклад в интеграл дает все меньшая окрестность концевых точек  $a = 0.5, b = 1.5$ . При  $\lambda \rightarrow \infty$  остальные вклады взаимно компенсируются из-за осцилляций функции  $e^{i\lambda S(t)}$ . (б) — случай 2°,  $S = t^2$ . При увеличении параметра  $\lambda = 10, 30, 100$  вклад вносит все меньшая окрестность стационарной точки  $t_0 = 0$ . Остальные вклады знакопеременные и при  $\lambda \rightarrow \infty$  гасят друг друга.

### 12.3 Метод стационарной фазы

Асимптотика интеграла с чисто мнимой фазой

$$F(\lambda) = \int_a^b A(t)e^{i\lambda S(t)} dt, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (12.5)$$

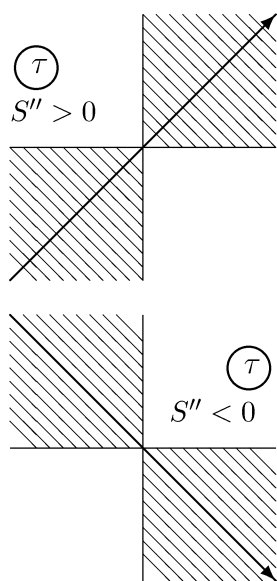
где  $A(t), S(t)$  снова действительные функции, также получается разной, в зависимости от наличия или отсутствия стационарной точки функции  $S(t)$  на интервале интегрирования  $(a, b)$ . Вещественная часть подынтегральной экспоненты для случаев 1° и 2° показана на рисунках 12.2. Аналогично предыдущему разделу, главный член асимптотического разложения получится в случае 1° порядка  $\lambda^{-1}$ , а в случае 2° —  $\lambda^{-1/2}$ .

В случае 1° оценку получим интегрированием по частям

$$F(\lambda) = \int_a^b A(t) \frac{de^{i\lambda S(t)}}{i\lambda S'(t)} \approx \frac{1}{i\lambda} \left[ \frac{A(b)e^{i\lambda S(b)}}{S'(b)} - \frac{A(a)e^{i\lambda S(a)}}{S'(a)} \right].$$

В случае 2° разлагаем в ряд (12.2) фазовую функцию, распространяем пределы интегрирования до бесконечности и сводим задачу к интегралу Френеля

$$F(\lambda) = A(t_0)e^{i\lambda S(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda S''(t_0)\tau^2/2} d\tau.$$



Сначала следует повернуть контур интегрирования заменой  $\tau = se^{i\phi}$ ,  $d\tau = e^{i\phi} ds$ , где  $\phi$  — угол поворота,  $s$  координата вдоль нового контура. Для сходимости при  $\lambda \rightarrow +\infty$  вещественная часть подынтегральной экспоненты  $e^{iS''\tau^2}$  должна убывать. Поэтому сектора сходимости, заштрихованные на рисунке, находятся в I и III четверти при  $S''(t_0) > 0$  или во II и IV четверти комплексной плоскости  $\tau$  при  $S''(t_0) < 0$ . Если повернуть контур на угол  $\phi = \pi/4$ ,  $S'' > 0$  или на угол  $\phi = -\pi/4$ ,  $S'' < 0$  (повернутый контур изображен на каждом рисунке стрелкой), то обратится в нуль мнимая часть экспоненты и вычисление сведется к интегралу Пуассона

$$\tau = se^{i\pi/4} : \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|S''|s^2/2} ds e^{i\pi/4} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''|}} e^{i\pi/4},$$

$$\tau = se^{-i\pi/4} : \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|S''|s^2/2} ds e^{-i\pi/4} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''|}} e^{-i\pi/4}.$$

Оба случая можно записать единой формулой

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(t_0)|}} A(t_0) e^{i\lambda S(t_0) + i\frac{\pi}{4} \text{sgn} S''(t_0)}, \tag{12.6}$$

где  $\text{sgn} S''(t_0)$  означает знак второй производной в стационарной точке.

**Замечание 12.1.** Мы предполагали, что вторая производная отлична от нуля. Если она обращается в нуль, т.е.  $S''(t_0) = 0, S'''(t_0) = 0, \dots, S^{(n-1)}(t_0) = 0, S^{(n)}(t_0) \neq 0$ , то оценка делается аналогично. Интеграл не сводится к интегралу Пуассона, но выражается через  $\Gamma$ -функцию, а зависимость от параметра получается  $F \sim \lambda^{-1/n}$ . Если стационарных точек несколько и они не бесконечно близко друг от друга, асимптотика интеграла дается суммой по стационарным точкам.

**Пример 12.3 (Функция Бесселя).** Найдем асимптотику при  $x \rightarrow \infty$ , пользуясь интегральным представлением

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \varphi - im\varphi} d\varphi.$$

Раз в условии не оговорено противное, считаем, что индекс  $m$  зафиксирован. Тогда фазовая функция —  $S(\varphi) = \sin \varphi$ . Отсюда

$$S' = \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad S(\pm\pi/2) = \pm 1, \quad S''(\pm\pi/2) = \mp 1.$$

Достаточно оценить методом стационарной фазы по формуле (12.6) вклад одной из точек, например,  $\varphi = +\pi/2$ , тогда вклад другой точки — комплексно сопряженная величина

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{ix - im\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{4}} + \text{к.с.} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Пример 12.4 (Функция Эйри). Воспользуемся интегральным представлением

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t^3/3 + xt)} dt, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Масштабным преобразованием  $t = \mu\tau$ ,  $dt = \mu d\tau$  «остановим» стационарную точку:  $\lambda S = \mu^3(\tau^3/3 - |x|\tau/\mu^2)$  будет содержать в скобке функцию  $\tau$ , не зависящую от параметра  $\mu$ , когда  $\mu = |x|^{1/2}$ . Отсюда  $S(\tau) = \tau^3/3 - \tau$ ,  $\lambda = \mu^3$ . Дифференцируя фазовую функцию, найдем  $S' = \tau^2 - 1 = 0 \Rightarrow \tau_{1,2} = \pm 1$ , откуда  $S(\pm 1) = \mp 2/3$ ,  $S''(\pm 1) = \pm 2$ . Вклад точек тоже оказывается комплексно сопряженными

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \rightarrow -\infty.$$

Функция Эйри при  $x \rightarrow -\infty$  представляет собой волновую функцию частицы в однородном поле в классически доступной области. Поэтому естественно, что асимптотика получилась осциллирующей с уменьшающейся длиной волны де Бройля по мере увеличения  $|x|$ .