

# ЛЕКЦИЯ 13

## Метод перевала

### 13.1 Седловая точка

Метод перевала (седловой точки, наискорейшего спуска) предназначен для получения асимптотики интеграла

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} e^{\lambda S(z)} dz, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (13.1)$$

где  $S$  — функция, аналитическая в окрестности кривой  $\gamma$ ,  $\lambda$  — большой вещественный параметр.

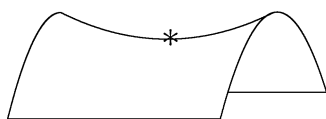
Основная идея метода заключается в такой деформации контура  $\gamma$ , чтобы подынтегральная функция была велика по абсолютной величине на как можно более коротком участке. Одновременно при перемещении по такому же контуру подынтегральная функция не испытывает осцилляций.

Действительно, разобьем фазовую функцию на действительную и мнимую части  $S(z) = u(z) + iv(z)$ ,  $z = x + iy$ . Поскольку  $S(z)$  — аналитическая функция, для  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  выполняются соотношения Коши — Римана

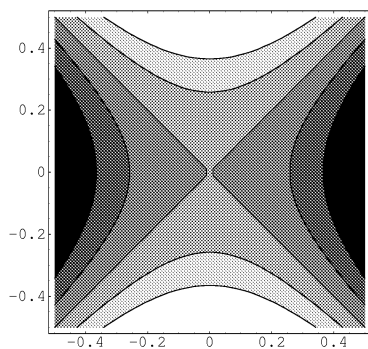
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$



В инвариантном виде это означает  $\Delta u = \Delta v = \nabla u \cdot \nabla v = 0$ . Отсюда получается два вывода. Во-первых, если в стационарной точке  $z_0$ , где  $S'(z_0) = 0$ , одна из вторых частных производных положительна, например,  $u_{xx} > 0$ , то вторая — отрицательна,  $u_{yy} < 0$ . Значит стационарная точка представляет собой *седло* или *точку перевала*, обозначенную здесь знаком \*.



На рисунке изображены линии уровня вещественной части  $u = u(x, y)$  в окрестности стационарной точки  $z_0 = 0$  для простейшего случая, когда разложение фазовой функции начинается с квадратичных членов

$$S(z) \approx S(z_0) + \frac{1}{2}S''(z_0)(z - z_0)^2. \quad (13.2)$$

Светлый тон означает более высокие точки, т.е. большие значения  $u$ , а темные области — «ямы». Тогда имеется два направления, в которых функция убывает, и два направления, в которых функция возрастает. Вещественная часть  $u(x, y)$  быстрее всего убывает вдоль *линии наискорейшего спуска*. Вдоль этой же линии мнимая часть  $v(x, y)$  постоянна, а значит подинтегральная функция не осциллирует. Это второй вывод из соотношений Коши — Римана, основанный на ортогональности градиентов функций  $v$  и  $u$ . На рисунке направления наискорейшего спуска проходят по действительным полуосям.

## 13.2 Топологический и аналитический этапы

Задача оценки интеграла (13.1) сводится к двум шагам.

- 1° **ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.** Деформация контура в проходящий через седловую точку в направлениях наискорейшего спуска.
- 2° **АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.** Оценка интеграла по разложению фазовой функции в малой окрестности точки перевала.

*Топологическая часть* — самая сложная. Чтобы понять, что за контур нам нужен, оценим абсолютную величину функции  $F(\lambda)$ :

$$|e^{\lambda S}| = e^{\lambda u(z)} \leq \max_{z \in \gamma} e^{\lambda u(z)}, \quad (13.3)$$

где максимум берется по всем  $z$ , лежащим на кривой  $\gamma$ . Чтобы оценка была как можно точнее, станем варьировать контур  $\gamma$ , не выходя за множество  $\Gamma$  допустимых контуров. *Допустимыми (эквивалентными)* будем называть те контуры, на которых равны интегралы. Значит при деформации контура мы не должны выходить за область аналитичности функции  $S(z)$ , т.е. пересекать полюсы. Если контур не замкнутый, а его концы лежат в конечных точках, надо закрепить концы контура. Для несобственного интеграла бесконечно удаленные концы контура должны оставаться в секторах сходимости.

Будем менять форму контура, пока максимум в правой части (13.3) не перестанет уменьшаться. Самая точная оценка получится, если в качестве контура  $\gamma = \gamma^*$  выбрать тот, на котором достигается минимум

$$|\exp \lambda S| \leq \min_{\gamma \in \Gamma} \max_{z \in \gamma} \exp \lambda u(z). \quad (13.4)$$

Такой контур называется *минимаксным*. Возможность его выбора в общем случае не доказана. Однако, в простых задачах, например, при вычислении асимптотик многих специальных функций, найти минимаксный контур удается и полученные оценки интеграла оказываются весьма точными. В примерах, рассмотренных ниже, минимаксный контур состоит из *линий Стокса* — таких кривых, вдоль которых мнимая часть  $v$  функции  $S(z)$  постоянна, а следовательно, действительная часть  $u$  меняется быстрее всего. Совокупность линий Стокса, проходящих через критические точки фазовой функции, будем называть ее *графом Стокса*. Граф сделаем ориентированным, указывая на линиях Стокса стрелками направление убывания функции  $u$ .

*Аналитическая часть* предполагает локальное исследование функции, поэтому второй шаг сделать проще. Интеграл оценивают, сводя его к эталонному в малой окрестности стационарной точки. Выполним такую оценку в простейшем случае (13.2), когда вторая производная отлична от нуля. Для этого выделим модули и аргументы

$$S''(z_0) = \rho e^{i\theta}, \quad z - z_0 = se^{i\phi}.$$

Отсюда

$$S(z) - S(z_0) = \frac{1}{2} \rho s^2 e^{i\theta + 2i\phi}.$$

Теперь найдем те направления, вдоль которых разность  $S(z) - S(z_0)$  быстрее всего убывает с увеличением  $s$ , т.е. равна  $-\rho s^2/2$ . Чтобы так получилось, комплексная экспонента должна обратиться в  $-1$ ,  $\cos(\theta + 2\phi) = -1$ , откуда

$$\phi_{1,2} = \frac{\pm\pi - \theta}{2}. \quad (13.5)$$

В этом же направлении мнимая часть обращается в нуль,  $\sin(\theta + 2\phi) = 0$ ,

$$\operatorname{Im}(S(z) - S(z_0)) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0).$$

Поэтому при интегрировании исчезают осцилляции подынтегральной функции. Теперь интеграл сводится к типу Лапласа

$$F(\lambda) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(z_0)|}} e^{\lambda S(z_0) + i\phi}. \quad (13.6)$$

В качестве  $\phi$  надо выбрать то из двух направлений  $\phi_{1,2}$  (13.5), вдоль которого мы интегрируем.

**Замечание 13.1.** В исходном интеграле (13.1) мы пропустили амплитудную функцию  $A(z)$ . Если такая функция имеется, оценка интеграла умножится на ее значение в стационарной точке  $z_0$ . Функция  $A(z)$  предполагается аналитической и при деформации контура надо следить, чтобы не выйти за область аналитичности амплитуды. Существенным может оказаться также вклад концов контура, которые вычисляются интегрированием по частям, как и в случаях I, рассмотренных в предыдущей лекции.

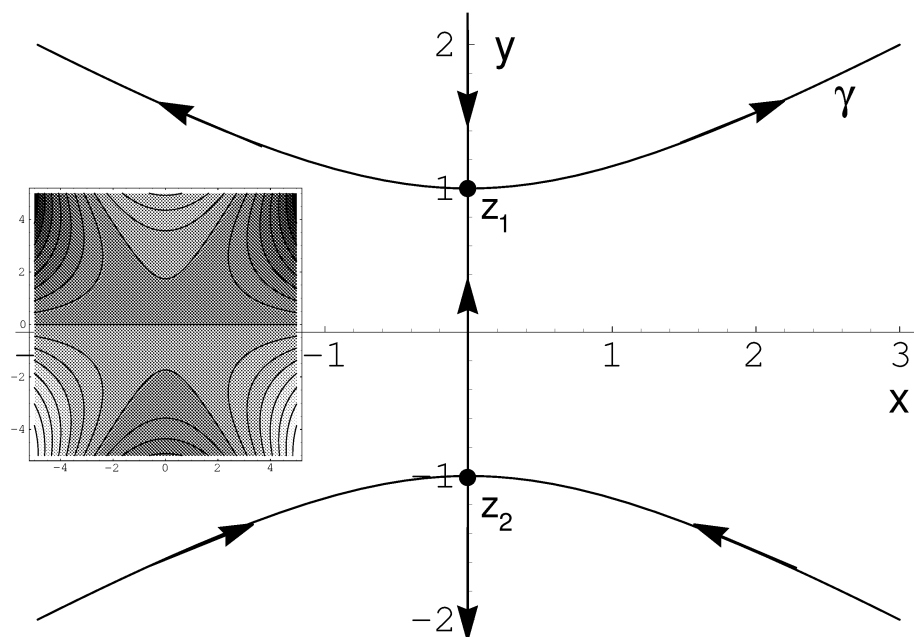


Рис. 13.1: Линии Стокса функции  $S = i(z^3/3 + z)$ . Стрелками показано направление уменьшения  $u(x, y)$ . На врезке показаны линии уровня  $u(x, y) = \text{const}$ . Высокие области светлее, низкие — темнее.

*Замечание 13.2.* Если в задаче несколько неподвижных изолированных стационарных точек, через которые проходит минимаксный контур, оценка интеграла получается из (13.6) суммированием по всем таким точкам.

*Замечание 13.3.* Если функция  $S$  зависит от дополнительного параметра  $\mu$ , при изменении которого стационарные точки сливаются, а нам необходима равномерная по  $\mu$  оценка, то интеграл сводится к другому более сложному эталонному. Подробности см. в справочнике [47], где приведены и другие особые случаи: слияние стационарной точки с полюсом, концом контура интегрирования, точкой ветвления.

### 13.3 Примеры

Пример 13.1 (*Функция Эйри при  $p \rightarrow +\infty$* ). Найдем асимптотику функции Эйри в классически запрещенной области

$$\text{Ai}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t^3/3 + pt)} dt, \quad p \rightarrow +\infty.$$

Сначала «остановим» стационарную точку

$$t = p^{1/2} z, \quad dt = p^{1/2} dz, \quad S = i(z^3/3 + z), \quad \lambda = p^{3/2}.$$

Дифференцируя фазовую функцию, найдем

$$S' = i(z^2 + 1) = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm i, \quad S(\pm i) = \mp \frac{2}{3}, \quad S''(\pm i) = \mp 2.$$

Чтобы понять, через какую точку пройдет минимаксный контур, построим те линии Стокса, которые проходят через стационарные точки, т.е. в которых  $\text{Im } S(z) = \text{Im } S(z_{1,2})$ :

$$v(x, y) = \text{Im } S = \text{Im } i \left( \frac{x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3}{3} + x + iy \right) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + x = 0.$$

Получится гипербола  $x^2/3 - y^2 = -1$  с асимптотами, наклоненными под углами  $\pm\pi/6$ , и прямая  $x = 0$ , рис. 13.1.

Теперь найдем секторы абсолютной сходимости интеграла. Для этого надо взять  $z = Re^{i\alpha}$  при  $R \rightarrow \infty$  и посмотреть, когда вещественная часть фазы отрицательна. Получается  $\alpha \in (0, \pi/3) \cup (2\pi/3, \pi) \cup (4\pi/3, 5\pi/3)$ . Значит мы можем деформировать контур  $\gamma$ , проходящий по действительной оси, так, чтобы он проходил через точку  $z_1 = i$ . Контур, проходящий через вторую стационарную точку, не относится к множеству допустимых, поскольку при деформации контура его концы не должны выходить за секторы сходимости. Можно непрерывно преобразовать контур  $\gamma$  в верхнюю ветвь гиперболы, не выходя за область аналитичности подынтегральной функции. Такой контур и допустимый, и минимаксный.

Асимптотическая оценка получается из формулы (13.6), если выбрать из  $\phi_{1,2} = 0, \pi$  направление  $\phi = 0$ , в котором ведется интегрирование

$$\text{Ai}(p) \approx \frac{e^{-\frac{2}{3}p^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}p^{1/4}}. \quad (13.7)$$

Асимптотика получилась экспоненциально затухающей, как и должно быть для волновой функции частицы в классически запрещенной области.

Пример 13.2 (Функция Эйри при  $p \rightarrow -\infty$ ). Найдем методом перевала асимптотику функции Эйри

$$\text{Ai}(-p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t^3/3 - pt)} dt, \quad p \rightarrow +\infty,$$

ту же, что и в примере 12.4. После замены переменной  $t = p^{1/2}z$  фазовая функция  $S(z) = i(z^3/3 - z)$  получится с другим знаком перед  $z$ . Асимптотические ее свойства при  $|z| \rightarrow \infty$  определяются кубическим членом, поэтому секторы сходимости останутся теми же, что и в предыдущем примере. Найдем стационарные точки

$$S' = i(z^2 - 1) = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm 1, \quad S(\pm 1) = \mp \frac{2}{3}i, \quad S''(\pm 1) = \pm 2i.$$

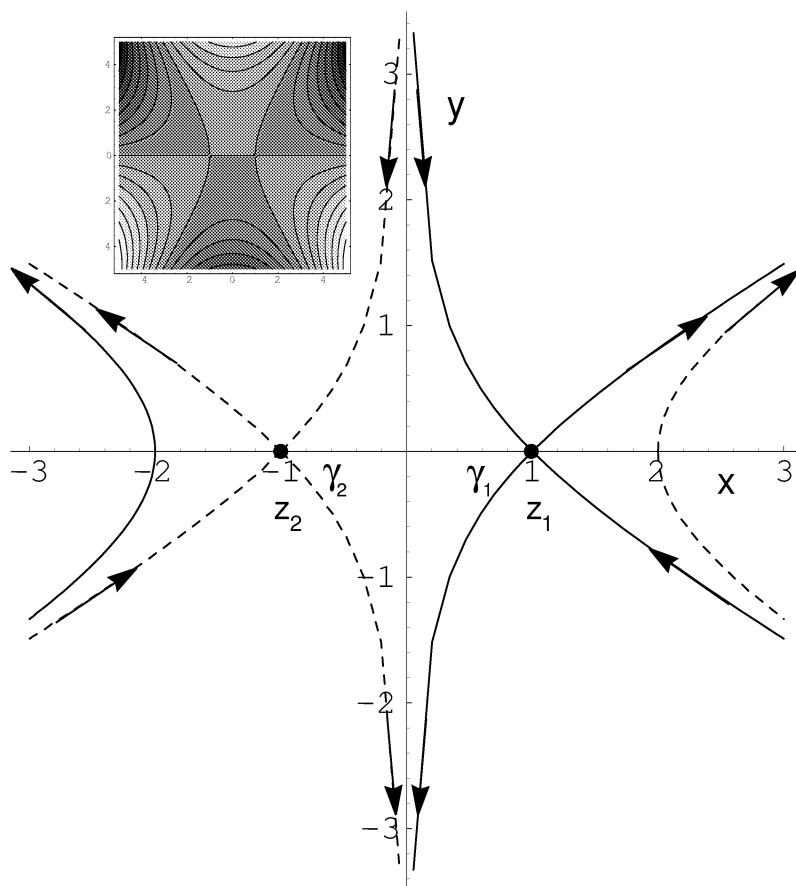


Рис. 13.2: Линии Стокса функции  $S = i(z^3/3 - z)$ :  $v(x, y) = -2/3$  (сплошные линии) или  $v(x, y) = +2/3$  (пунктир). Врезка — линии уровня  $u(x, y) = \text{const}$ . Чем светлее область, тем больше высота.

Построим граф Стокса  $\text{Im } S(z) = \text{Im } S(z_1)$  :

$$v(x, y) = \text{Im } S = \text{Im } i \left( \frac{x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3}{3} - x - iy \right) = \frac{x^3}{3} - xy^2 - x = -\frac{2}{3}.$$

Можно качественно построить кривые, если решить уравнение относительно

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3x} - 1 + \frac{x^2}{3}}.$$

На рисунке 13.2 изображены линии для  $v = \pm 2/3$ . Чтобы пройти по минимаксному контуру, надо серьезно деформировать исходный контур — действительную ось превратить в ветви  $\gamma_1 \cup \gamma_2$ . Как и в методе стационарной фазы, точки перевала надо пройти под углами  $\phi = \pi/4$  при  $z_1 = 1$  и  $\phi = 3\pi/4$  при  $z_2 = -1$ . Получится та же осциллирующая асимптотика, что и в методе стационарной фазы:

$$\text{Ai}(-p) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}p^{1/4}} \cos \left( \frac{2}{3}p^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right). \tag{13.8}$$

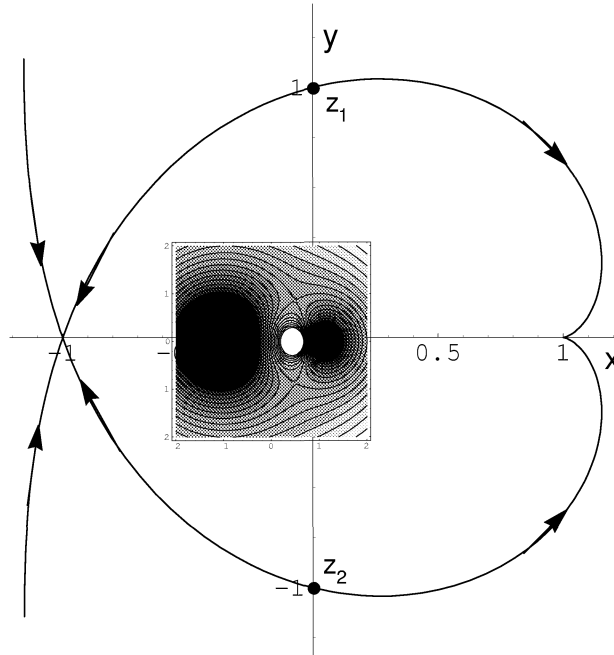


Рис. 13.3: Граф Стокса функции  $S = \ln(z^2 - 1) - \ln(z - \cos \theta)$ ,  $\theta = \pi/3$ . На врезке линии уровня  $u(x, y) = \text{const}$ .

Пример 13.3 (Полиномы Лежандра). Интегральное представление получим из формулы Родрига, сравнив ее с формулой для вычета в полюсе порядка  $l + 1$

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{2^l} \frac{(z^2 - 1)^l}{(z - \xi)^{l+1}}.$$

Контур  $\gamma$  обходит точку  $z = \xi \equiv \cos \theta$  в положительном направлении. Выберем амплитуду  $A(z) = (z - \xi)^{-1}$  и фазу

$$S(z) = \ln \frac{z^2 - 1}{z - \cos \theta}.$$

Пусть  $l \gg 1$  — большой параметр. Найдём стационарные точки

$$S' = \frac{2z}{z^2 - 1} - \frac{1}{z - \cos \theta} = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1} = e^{\pm i\theta},$$

$$S(e^{\pm i\theta}) = \ln 2e^{i\theta} = \ln 2 + i\theta, \quad S''(e^{\pm i\theta}) = \frac{e^{\mp i\theta}}{i \sin \theta}.$$

Значит значение аргумента  $\psi$  второй производной  $S''(z_1) = \rho e^{i\psi}$  равно  $\psi = -\theta - \pi/2$ . Отсюда  $\phi_1 = 3\pi/4 + \theta/2$ ,  $\phi_2 = -\pi/4 + \theta/2$ . Из графа Стокса на рис. 13.3 видно, что при интегрировании против часовой стрелки надо выбрать  $\phi_1$ . Получаем асимптотику

$$P_l(\cos \theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi l |\sin \theta|}} \cos \left( l\theta + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

Нет никаких препятствий, мешающих деформировать исходный контур так, чтобы он прошел вдоль линий Стокса, потому что полюс  $z = \cos \theta$  остается внутри контура.

Найденная асимптотика справедлива при углах  $\theta$ , не слишком близких к 0,  $\pi$ :

$$|\theta|, \left| \frac{\pi}{2} - \theta \right| \gg \frac{1}{l}.$$

Неравномерность разложения вблизи 0 и  $\pi$  связана с неприменимостью там предположений об изолированности критических точек и аналитичности амплитуды. При  $\theta \rightarrow 0$  или  $\pi$  точки  $z_{1,2} = e^{\pm i\theta}$  сближаются. Впрочем, особенность оказалась интегрируемой, если вычислять интеграл от квадрата полинома Лежандра по  $\sin \theta d\theta$ .

Для получения равномерного при  $\theta \rightarrow 0$  разложения можно воспользоваться угловым уравнением (9.2) при  $m = 0$ :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{du}{d\theta} = -l(l+1)u.$$

При малых углах заменяем  $\operatorname{ctg} \theta \approx \theta^{-1}$ , а  $l(l+1) \approx (l+1/2)^2$  при  $l \gg 1$ . Получается уравнение Бесселя

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{1}{\theta} \frac{du}{d\theta} + \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 u = 0.$$

Решение дается функцией Бесселя нулевого порядка, которую при  $l\theta \gg 1$  можно заменить асимптотикой

$$u(\theta) = J_0((l+1/2)\theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi l \theta}} \cos \left( (l + \frac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4} \right).$$

В общей области применимости, при  $1/l \ll \theta \ll 1$ , обе асимптотики совпадают. Заметим, что сами предельные значения при  $\theta \rightarrow 0, \pi$  можно получить непосредственно из формулы Родрига:  $P_l(1) = 1$ ,  $P_l(-1) = (-1)^l$ .