

# ЛЕКЦИЯ 14

## Метод усреднения

подавляющее большинство дифференциальных уравнений не допускают точного решения. Однако, если имеется малый параметр

$$\epsilon \ll 1,$$

а при  $\epsilon = 0$  уравнение решается, то можно найти приближенное решение в виде разложения по степеням параметра  $\epsilon$ . Методы построения таких разложений для различных задач называются *теорией возмущений*. Желательно, чтобы такое разложение было равномерным по параметру.

Обычный ряд Тейлора не всегда дает равномерное разложение, как видно из простейшего примера

$$\sin((1 + \epsilon)t) = \sin t + \epsilon t \cos t - \frac{(\epsilon t)^2}{2!} \sin t + \dots$$

Разложение хорошо работает на малых временах вплоть до  $t \sim 1$ , а при  $t \sim 1/\epsilon$  несколько первых членов разложения не дают даже приближенного представления о поведении функции. Одним из методов теории возмущений, который позволяет найти тенденцию изменения решения на больших временах, называется *методом усреднения*. Метод усреднения используется в небесной механике со времен Лагранжа и Лапласа для расчета эволюции планетных орбит. Однако до сих пор его обоснование нельзя считать законченным. Мы рассмотрим только простейшие случаи. Более общие результаты можно найти в книгах Арнольда [25, с.133], [48, с.365].

Пусть система *невозмущенных* уравнений  $\dot{x} = v(x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  описывает финитное движение с характерным периодом  $T \sim 1$ . *Возмущенным* назовем уравнение

$$\dot{x} = v(x) + \epsilon v_1(x),$$

где  $\epsilon$  — малый параметр. Цель метода усреднения — найти разложение решения  $x(t)$ , справедливое на больших временах  $t \sim 1/\epsilon$

## 14.1 Усредненное уравнение

Перепишем невозмущенное уравнение в новых переменных  $I, \varphi$

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega(I). \quad (14.1)$$

Назовем  $I$  — *медленной* переменной, а  $\varphi$  — *угловой* переменной или фазой. Тогда возмущенное уравнение запишется как

$$\dot{I} = \epsilon g(I, \varphi), \quad \dot{\varphi} = \omega(I) + \epsilon f(I, \varphi), \quad (14.2)$$

где функции  $f, g$  находятся по функции  $v_1(x)$ .

Вместо (14.2) рассмотрим *усредненное уравнение*

$$\dot{J} = \epsilon G(J), \quad G(J) = \frac{\int g(J, \varphi) d\varphi}{\int d\varphi}. \quad (14.3)$$

Метод усреднения предлагает рецепт — решить усредненное уравнение для функции  $J$  вместо возмущенных уравнений (14.2). Выигрыш очевиден, уравнений в системе (14.3) вдвое меньше, чем в исходной.

**Пример 14.1.** Пусть  $n = 1$ ,  $I, \varphi$  — скалярные функции,  $\omega$  — постоянная. Рассмотрим возмущенное уравнение

$$\dot{I} = \epsilon(a + b \sin \varphi), \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad I(0) = I_0, \quad \varphi(0) = 0.$$

Невозмущенное уравнение  $\dot{I} = 0, \dot{\varphi} = \omega$  дает  $I(t) = I_0, \varphi(t) = \omega t$ . В данном примере несложно найти и решение возмущенного уравнения

$$I(t) = \epsilon a t + \epsilon b \int_0^t \sin(\omega t') dt' + I_0 = \epsilon a t + \frac{\epsilon b}{\omega} (1 - \cos \omega t) + I_0.$$

**Усредненное уравнение**

$$\dot{J} = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a + b \sin \varphi) d\varphi = \epsilon a$$

решается сразу. Его решение  $J(t) = I_0 + \epsilon a t$  при тех же начальных условиях уходит от точного на величину порядка  $\epsilon$ , а значит правильно передает тенденцию на больших временах

$$|J(t) - I(t)| = \frac{\epsilon b}{\omega} |1 - \cos \omega t| \leq \text{const} \cdot \epsilon.$$

Проще всего вывести усредненное уравнение для одночастотной системы  $n = 1$ . При одинаковых начальных условиях изменение медленной переменной за период  $T = 2\pi/\omega$  равно

$$\Delta I = I(t) - I(0) = \epsilon T \cdot \frac{1}{T} \int_0^T g(I, \varphi(t)) dt = \epsilon T \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(I, \varphi) d\varphi = \epsilon T G(I).$$

Усреднение по времени заменяем усреднением по быстрой переменной  $\varphi$ :  $dt = d\varphi/\dot{\varphi} = d\varphi/\omega$  и переобозначим  $I \rightarrow J$ . Медленная эволюция  $J$  за много периодов описывается разностным уравнением

$$\frac{\Delta J}{\Delta t} = \epsilon G(J),$$

которое называется *стробоскопическим*. Приблизительно заменяя отношение конечных разностей производной, получим усредненное дифференциальное уравнение (14.3).

Самое тонкое место здесь замена усреднения по времени усреднением по всем значениям угловой переменной  $\varphi$ . Наш вывод относится к одночастотной системе, в которой имеется всего  $n = 1$  угловая переменная  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . При  $n > 1$  уравнения (14.1), (14.2), (14.3) пишутся так же, как в одночастотном случае, но под переменными  $I, \varphi$  понимаются векторы  $I = (I_1, \dots, I_n)$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ . Частота и угловая переменная тоже векторы  $\omega = (\omega_1(I), \dots, \omega_n(I))$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ . При  $n = 2$  движение в пространстве угловых переменных  $(\varphi_1, \varphi_2)$  происходит по поверхности тора

$$\varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_1(0), \quad \varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_2(0), \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi.$$

При рациональном отношении частот  $\omega_1/\omega_2 = p/q$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$  «намотка» замыкается и траектория движения не замечает всю поверхность тора. Значит заменять на усреднение по поверхности тора незаконно, по крайней мере при небольших значениях чисел  $p, q$ . Такие случаи называются *резонансами*. При больших  $p, q$  даже замкнутая траектория проходит практически через всю поверхность тора и можно пользоваться методом усреднения как приближением.

На рисунке 14.1 изображен тор с замкнутой траекторией. В левом верхнем углу изображена прямоугольная выкройка тора, стрелки на сторонах показывают, с какой ориентацией стороны склеиваются. Траектория движения  $AA$  тоже показана стрелкой. Точка  $A$  на траектории попала на две противоположных стороны прямоугольника, которые склеены. Траектория замкнута, она соответствует резонансу  $\omega_1/\omega_2 = 0/1$ , когда метод усреднения заведомо не работает.

**Пример 14.2.** Рассмотрим один пример двухчастотной системы, чтобы познакомиться с еще одним явлением *прохождением через резонанс*. Если имеется

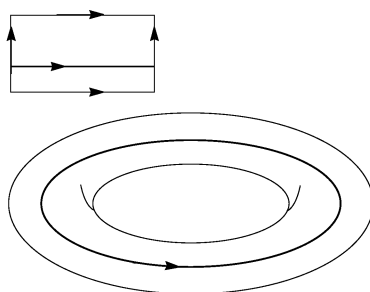


Рис. 14.1: Тор  $(\varphi_1, \varphi_2)$  с замкнутой намоткой: резонанс  $\omega_1/\omega_2 = 0/1$ .

малая нелинейность — зависимость частоты  $\omega$  от амплитуды  $I$ , то система за большое время  $t \sim 1/\epsilon$  выходит из резонанса.

$$\dot{\varphi}_1 = I_1, \quad \dot{\varphi}_2 = 1, \quad \dot{I}_1 = \epsilon, \quad \dot{I}_2 = \epsilon \cos \varphi_1.$$

Решение невозмущенного уравнения находится сразу

$$I_1 = I_1(0), \quad I_2 = I_2(0), \quad \varphi_1 = I_1(0)t + \varphi_1(0), \quad \varphi_2 = t + \varphi_2(0).$$

Отношение частот  $\omega_1/\omega_2 = I_1(0)$ , значит резонансы будут при начальных условиях  $I_1(0) = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Рассмотрим резонанс нулевого порядка  $I_1(0) = 0$  (изображенный на рисунке 14.1).

Усредненное уравнение

$$\dot{J}_1 = \epsilon, \quad \dot{J}_2 = 0$$

имеет решение  $J_1 = \epsilon t, J_2 = \text{const}$ . Чтобы проверить, насколько велика ошибка решения усредненного уравнения, найдем точное решение и проверим, сохраняется ли величина  $I_2$ . Обращаясь к возмущенному уравнению, получим

$$\begin{aligned} I_1 = \epsilon t, \quad \varphi_1 = \epsilon \frac{t^2}{2} + \varphi_1(0) &\Rightarrow \Delta I_2 = \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left( \epsilon \frac{t^2}{2} + \varphi_1(0) \right) dt = \\ &= \sqrt{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left( \frac{\xi^2}{2} + \varphi_1(0) \right) d\xi = \sqrt{\pi\epsilon} (\cos \varphi_1(0) - \sin \varphi_1(0)). \end{aligned}$$

Значит уход переменной  $I_2$  от значения  $J_2 = \text{const}$ , предсказанного методом усреднения, не так уж и велик

$$|J_2 - I_2| \leq \text{const} \cdot \sqrt{\epsilon}.$$

Оценка получилась не  $\sim \epsilon$ , как в одночастотной системе, но по крайней мере  $\epsilon^{1/2} \rightarrow 0$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ . В многочастотном случае погрешность метода усреднения может увеличиться.

## 14.2 Метод Боголюбова — Крылова

Остался открытым вопрос, как найти переменные  $I, \varphi$  в конкретной задаче. Рассмотрим один из методов, приспособленный к задаче о слабо нелинейном осцилляторе

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon \omega_0^2 F(x, \dot{x}),$$

где  $F$  - функция, зависящая от координаты и скорости (возможно, еще и от времени как параметра), а  $\epsilon$  — малый параметр. Перейдем к безразмерному времени  $t \rightarrow \omega_0 t$ , получим безразмерное уравнение

$$\ddot{x} + x = \epsilon F(x, \dot{x}).$$

Введем также вспомогательную комплексную переменную  $z = x + i\dot{x}$ , положение невозмущенного осциллятора на фазовой плоскости, тогда

$$\dot{z} = \dot{x} + i\ddot{x} = \dot{x} + i(-x + \epsilon F) = -i(x + i\dot{x}) + i\epsilon F = -iz + i\epsilon F.$$

Если теперь перейти к аргументу и модулю  $z = Ie^{i\varphi}$  и разделить действительную и мнимую части, то уравнение осциллятора сводится к виду (14.2)

$$\dot{I} = \epsilon F \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = -1 + \epsilon \frac{F}{I} \cos \varphi. \quad (14.4)$$

Усредненное уравнение (14.3) получится с функцией  $G(J)$ , которая дается интегралом

$$\dot{J} = \epsilon G(J), \quad G(J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(J \cos \varphi, J \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = \langle F(J \cos \varphi, J \sin \varphi) \sin \varphi \rangle, \quad (14.5)$$

где треугольные скобки означают усреднение по  $\varphi$ . В усредненное уравнение вошла фурье-компонента возмущающей силы на частоте невозмущенных колебаний.

## 14.3 Примеры

**Пример 14.3 (Резонанс).** Малая внешняя сила раскачивает осциллятор на его собственной частоте  $F(x, \dot{x}) = \cos t$ . Невозмущенная угловая переменная (фаза осциллятора) находится из уравнения (14.4):  $\varphi(t) = -t + \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  — начальная фаза. Отсюда находим

$$G(J) = \langle \cos(\varphi_0 - \varphi) \sin \varphi \rangle = \langle (\cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin \varphi_0 \sin \varphi) \sin \varphi \rangle = \frac{1}{2} \sin \varphi_0.$$

Усредненное уравнение  $\dot{J} = \epsilon \sin \varphi_0 / 2$  решается:  $J(t) = J(0) + \epsilon t \sin \varphi_0 / 2$ . Медленная переменная  $J$ , амплитуда колебаний, линейно растет со временем, когда начальная фаза  $\varphi_0 \neq 0, \pi$ .

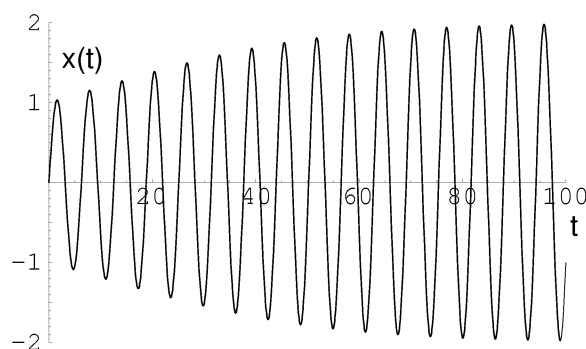


Рис. 14.2: Выход генератора Ван дер Поля на автоколебательный режим:  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1, \epsilon = 0.05$ .

Пример 14.4 (*Параметрический резонанс*). Уравнение параметрического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (1 + \epsilon \sin \Omega t) x = 0$$

при переходе к безразмерному быстрому времени дает  $F(x, \dot{x}) = x \sin \Omega t / \omega_0$ . Для примера рассмотрим резонанс на двойной частоте  $\Omega = 2\omega_0$ , тогда

$$\begin{aligned} G(J) &= \langle J \cos \varphi \sin 2(\varphi - \varphi_0) \sin \varphi \rangle = \\ &= J \langle \cos \varphi \sin \varphi (\sin 2\varphi_0 \cos 2\varphi - \cos 2\varphi_0 \sin 2\varphi) \rangle = -\frac{1}{4} J \cos 2\varphi_0; \\ \dot{J} &= \frac{\epsilon \cos 2\varphi_0}{4} J \Rightarrow J = J(0)e^{\nu t}, \quad \nu = \frac{\epsilon}{4} \cos 2\varphi_0. \end{aligned}$$

Если начальная фаза  $|\varphi_0| < \pi/4$ , то инкремент положителен  $\nu > 0$  и возникает параметрическая неустойчивость. Если включить в уравнение малое затухание  $\gamma \sim \epsilon$ ,  $F \rightarrow F - 2\gamma\dot{x}$ , усредненное уравнение тоже получится с затуханием  $\dot{J} = (\nu - \gamma)J$ . Учет трения приведет в появлению порога: параметрическая неустойчивость раскачивается при  $\nu > \gamma$ .

Пример 14.5 (*Уравнение Ван дер Поля*). Уравнение

$$\ddot{x} + x = \epsilon(1 - x^2)\dot{x}$$

описывает генератор — усилитель с положительной обратной связью, который может переходить в режим самовозбуждения. Соответствующая функция  $F = x(1 - x^2)$ , тогда из (14.5) найдем

$$G(J) = \langle J \sin \varphi (1 - J^2 \cos^2 \varphi) \sin \varphi \rangle = \frac{1}{2} J - \frac{1}{8} J^3 \Rightarrow \dot{J} = \frac{\epsilon}{8} J(4 - J^2).$$

Усредненное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными решается, но для наших целей достаточно исследовать его на устойчивость, посмотрев изменение знака  $\dot{J}$  в стационарных точках. Получается, что  $J = 0$  —

неустойчивое решение, а  $J = 2$  — устойчивое (режим автоколебаний). В исходных переменных уравнение Ван дер Поля описывает предельный цикл электронного генератора или одночастотного лазера, или, другими словами, выход на автоколебательный режим, рис. 14.2.