Приложение A

Сводка формул по специальным функциям

A.1 Г - функция Эйлера

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty dz\, z^{x-1} \mathrm{e}^{-z}, \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma dt\, t^{-z} \mathrm{e}^{t},$$

контур γ для представления Ганкеля изображен на рис. A.1.

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x), \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

A.2 Гипергеометрические функции

Гипергеометрическая функция Гаусса ${}_2F_1$

Дифференциальное уравнение для ${}_2F_1(a,b;c;x)$:

$$x(1-x)\,y'' + \Big[c - (a+b+1)x\Big]\,y' - ab\,y = 0.$$

Разложение в степенной ряд возле $x = 0$:

$${}_2F_1(a,b;c;x) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots$$

Преобразование Эйлера:

$${}_2F_1(a,b;c;x) = (1-x)^{-b}{}_2F_1\left(c-a, b; c; \frac{x}{x-1}\right).$$

Интегральное представление:

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int\limits_0^1 dt\, \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tx)^a}. $$

Вырожденная гипергеометрическая функция ${}_1F_1$

Дифференциальное уравнение для ${}_1F_1(a;c;x)$:

$$ x\,y'' + (c-x)\,y' - a\,y = 0. $$

Разложение в степенной ряд возле $x=0$:

$$ {}_1F_1(a;c;x) = \lim_{b\to\infty} {}_2F_1(a,b;c;x/b) = 1 + \frac{a}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots $$

Второе решение:

$$ y = x^{1-c}{}_1F_1(a-c+1;2-c;x). $$

Преобразование Куммера:

$$ {}_1F_1(a;c;x) = \mathrm{e}^x\,{}_1F_1(c-a;c;-x). $$

Интегральное представление:

$$ \begin{aligned} {}_1F_1(a;c;x) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int\limits_0^1 dt\, t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\mathrm{e}^{xt}\,, \\ \mathrm{Re}\,c &> \mathrm{Re}\,a > 0\,. \end{aligned} $$

Асимптотическое поведение:

$$ \begin{aligned} {}_1F_1(a;c;x) &\simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\mathrm{e}^x x^{a-c}, & x \to +\infty, \\ {}_1F_1(a;c;x) &\simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-x)^{-a}, & x \to -\infty. \end{aligned} $$

A.3 Цилиндрические функции

Функции Бесселя J_ν и Неймана Y_ν

Дифференциальное уравнение для $J_\nu(x)$:

$$ x^2\,y'' + x\,y' + (x^2-\nu^2)\,y = 0. $$

Разложение в степенной ряд возле $x = 0$:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n+\nu}}{n!\Gamma(n+\nu+1)}.$$

Выражение через гипергеометрическую функцию:

$$J_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} {}_1F_1\left(\nu + \frac{1}{2}; 2\nu+1; 2\mathrm{i}x\right).$$

Рекуррентное соотношение:

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x).$$

Формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned} 2\frac{d}{dx} J_\nu(x) &= J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)\,, \\ \frac{d}{dx}\left(x^{\pm\nu} J_\nu(x)\right) &= \pm x^{\pm\nu} J_{\nu\mp1}(x)\,. \end{aligned}$$

Интегральные представления Шлефли и Пуассона:

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{dz}{z^{\nu+1}} \exp\left(\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\,\sin\varphi - \mathrm{i}\nu\varphi} - \frac{\sin\pi\nu}{\pi} \int_0^{\infty} dt\, \mathrm{e}^{-x\,\mathrm{sh}\,t - \nu t}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^{2\nu}(\varphi) \cos\left(x \sin(\varphi)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{1} dt\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\,t} (1-t^2)^{\nu-1/2}, \quad \mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Интегрирование идет по контуру γ, рис. А.1, начинающемуся и заканчивающемуся в $-\infty$, обходящему точку $z = 0$ в положительном направлении.
Второе решение:

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin\pi\nu}\Big[J_\nu(x)\,\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)\Big].$$

Асимптотическое поведение:

$$J_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \to +\infty.$$

Случай полуцелого индекса:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

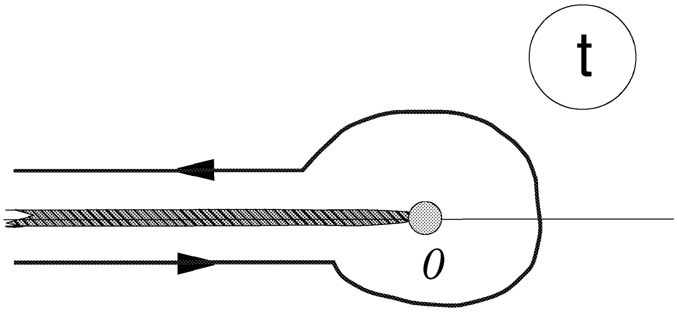

Рис. А.1: Контур интегрирования γ, обходящий разрез $-\infty < t \leq 0$ в положительном направлении.

Функции Бесселя целого порядка J_n

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Производящие функции:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\phi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} J_m(x),$$

$$\exp\left(\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n J_n(x).$$

Соотношения ортогональности:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx\, x J_k(\gamma_n x) J_k(\gamma_m x) &= \frac{\delta_{nm}}{2}\left(\frac{dJ_k(\gamma_m)}{d\gamma_m}\right)^2, \quad J_k(\gamma_m) = 0\,, \\
\int_0^1 dx\, x J_k(\lambda_n x) J_k(\lambda_m x) &= \frac{\delta_{nm}}{2}\left(1 - \frac{k^2}{\lambda_m^2}\right) J_k^2(\lambda_m), \quad \frac{dJ_k(\lambda_m)}{d\lambda_m} = 0\,.
\end{aligned}$$

Модифицированная функция Бесселя I_ν и функция Макдональда K_ν

Дифференциальное уравнение для $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$:

$$x^2\, y'' + x\, y' - (x^2 + \nu^2)\, y = 0.$$

Разложение в степенной ряд возле $x = 0$:

$$I_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n+\nu}}{n!\Gamma(n+\nu+1)}.$$

Выражение через обычные функции Бесселя:

$$I_\nu(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi/2} J_\nu(\mathrm{i}x).$$

Выражение для K_ν через I_ν, $I_{-\nu}$:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi\,[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]}{2\,\sin\pi\nu}.$$

Интегральные представления:

$$I_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \int\limits_{-1}^{1} dt\, \mathrm{e}^{-xt}(1-t^2)^{\nu-1/2}\,, \quad \mathrm{Re}\,\nu > -1/2\,,$$

$$K_\nu(x) = \int\limits_0^\infty dt\, \mathrm{e}^{-x\,\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{ch}\,\nu t, \quad \mathrm{Re}\,x > 0\,,$$

$$K_\nu(2\sqrt{pq}) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q}\right)^{\nu/2} \int\limits_0^\infty x^{\nu-1}\mathrm{e}^{-px-q/x}\,dx, \quad \mathrm{Re}\,p > 0, \mathrm{Re}\,q > 0\,.$$

Асимптотическое поведение:

$$I_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,\mathrm{e}^x, \quad K_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,\mathrm{e}^{-x}, \quad x \to +\infty.$$

$$I_\nu(x) \simeq \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \quad K_0(x) \simeq -\ln x, \quad x \to +0;$$

$$K_\nu(x) \simeq \frac{\Gamma(\nu)}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}, \quad x \to +0,\ \nu \neq 0.$$

A.4 Ортогональные полиномы

Полиномы Лежандра P_l и присоединенные функции Лежандра P_l^m

Дифференциальное уравнение для $P_l(x)$:

$$(1-x^2)\,y'' - 2x\,y' + l(l+1)\,y = 0.$$

Дифференциальное уравнение для $P_l^m(x)$:

$$(1-x^2)\,y'' - 2x\,y' + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\,y = 0.$$

Формулы Родрига:

$$P_l(x) \equiv P_l^0(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l\,,$$
$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\,.$$

Первые 3 полинома:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}.$$

Соотношение ортогональности:

$$\int\limits_{-1}^{1} dx\, P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{ll'}.$$

Рекуррентное соотношение:

$$x(2l+1)P_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x).$$

Формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned}(2l+1)P_l(x) &= \frac{d}{dx}P_{l+1}(x) - \frac{d}{dx}P_{l-1}(x)\,,\\ lP_l(x) &= x\frac{d}{dx}P_l(x) - \frac{d}{dx}P_{l-1}(x)\,.\end{aligned}$$

Производящие функции:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} = \begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x), & r<1;\\ \sum\limits_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}P_l(x), & r>1;\end{cases} \qquad -1<x<1.$$

Интегральные представления:

$$\begin{aligned}P_l(x) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint \frac{dz\, z^{-l-1}}{\sqrt{1-2xz+z^2}},\\ P_l(\cos\theta) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} d\varphi\,(\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta\,\cos\varphi)^l\,.\end{aligned}$$

Интегрирование идет по замкнутому контуру вокруг точки $t=0$ в положительном направлении.

Асимптотическое поведение:

$$P_l(\cos\theta) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi l}}\frac{\sin\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{\sin\theta}}, \quad l|\sin\theta| \gg 1.$$

Сферические гармоники Y_{lm}

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=C_{lm}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}P_l^{|m|}(\cos\theta).$$

Дифференциальные уравнения для Y_{lm}:

$$\Delta_\Omega Y_{lm}=-l(l+1)Y_{lm},\quad \mathrm{i}\frac{d}{d\varphi}Y_{lm}=-mY_{lm}\,,$$

где Δ_Ω - угловая часть трехмерного оператора Лапласа в сферических координатах.

Соотношение ортогональности:

$$\int\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,Y^*_{lm}(\theta,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\varphi)=\delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

Соотношение полноты:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\mathbf{n})Y^*_{lm}(\mathbf{n}')=\delta(\mathbf{n}-\mathbf{n}').$$

Полиномы Эрмита H_n

Дифференциальное уравнение для $H_n(x)$:

$$y''-2x\,y'+2n\,y=0.$$

Формула Родрига:

$$H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Первые 3 полинома:

$$H_0(x)=1,\quad H_1(x)=2x,\quad H_2(x)=4x^2-2.$$

Соотношение ортогональности:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\,\mathrm{e}^{-x^2}H_m(x)H_n(x)=\sqrt{\pi}2^n n!\,\delta_{mn}.$$

Соотношение полноты:

$$\frac{\mathrm{e}^{-(x^2+x'^2)/2}}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)H_n(x')}{2^n n!}=\delta(x-x').$$

Рекуррентное соотношение:

$$H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0.$$

Формула дифференцирования:

$$\frac{d}{dx}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

Производящая функция:

$$\exp\left(2xz - z^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(x).$$

Интегральные представления:

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \frac{2^{n+1} \mathrm{e}^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty dz\, z^n \mathrm{e}^{-z^2} \cos\left(2xz - \frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x + \mathrm{i}t)^n \, \mathrm{e}^{-t^2} \, dt. \end{aligned}$$

Полиномы Лагерра L_n^ν

Дифференциальное уравнение для $L_n^\nu(x)$:

$$x\, y'' + (\nu + 1 - x)\, y' + n\, y = 0.$$

Формула Родрига:

$$L_n^\nu(x) = \frac{x^{-\nu} \mathrm{e}^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \mathrm{e}^{-x} x^{n+\nu}.$$

Первые 3 полинома:

$$L_0^\nu(x) = 1, \quad L_1^\nu(x) = \nu + 1 - x,$$
$$L_2^\nu(x) = \tfrac{1}{2}(\nu+1)(\nu+2) - (\nu+2)x + \tfrac{1}{2}x^2.$$

Соотношение ортогональности:

$$\int\limits_0^\infty dx\, \mathrm{e}^{-x} x^\nu L_m^\nu(x) L_n^\nu(x) = \frac{\Gamma(n+\nu+1)}{n!}\, \delta_{mn}.$$

Соотношение полноты:

$$(xx')^{\nu/2} \mathrm{e}^{-(x+x')/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! L_n^\nu(x) L_n^\nu(x')}{\Gamma(n+\nu+1)} = \delta(x - x').$$

Рекуррентное соотношение:

$$(n+1)L_{n+1}^\nu(x) - (2n + \nu + 1 - x)L_n^\nu(x) + (n+\nu)L_{n-1}^\nu(x) = 0.$$

Формулы дифференцирования:

$$
\begin{aligned}
x\frac{d}{dx}L_n^\nu(x) &= nL_n^\nu(x) - (n+\nu)L_{n-1}^\nu(x)\,, \\
\frac{d}{dx}L_n^\nu(x) &= -L_{n-1}^{\nu+1}(x)\,.
\end{aligned}
$$

Производящая функция:

$$
(1-z)^{-\nu-1}\exp\left(\frac{xz}{z-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n L_n^\nu(x).
$$

Интегральное представление:

$$
\begin{aligned}
L_n^\nu(x) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint \left(1+\frac{x}{t}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\left(1+\frac{t}{x}\right)^\nu \frac{dt}{t} \\
&= \frac{(-1)^n}{2\pi \mathrm{i}}\oint \frac{(1-t)^{n+\nu}}{t^n}\,\mathrm{e}^{tx}\,\frac{dt}{t}\,.
\end{aligned}
$$

Здесь интегрирование идет по замкнутому контуру вокруг точки $t=0$ в положительном направлении.